FONDO PIZZOFALCONE

90549

BIBLIOTECA PROVINCIALE
Armadio XXV
Palchetto
Num° d' ordine 64 19769

19 e 51

NAZIONALE
B. P
R. BIBLIOTECA
EM. III
23902
NAPOLI

Digitized by Google

B. Prov.
I
2392

Digitized by Google

ÉLÉMENS
D'ANALYSE GÉOMÉTRIQUE
ET
D'ANALYSE ALGÉBRIQUE.

Digitized by Google

On trouve à la même adresse les Ouvrages suivans du même Auteur.

Élémens raisonnés d'Algèbre, publiés à l'usage des Étudians en philosophie, 2 vol. in-8.°

Polygonométrie, ou de la mesure des figures rectilignes, et Abrégé d'Isopérimétrie élémentaire, ou de la dépendance mutuelle des grandeurs et des limites des figures, 1 vol. in-4.°

Principiorum calculi differentialis et integralis expositio elementaris, 1 vol. in-4.°

608609

ÉLÉMENS
D'ANALYSE GÉOMÉTRIQUE
ET
D'ANALYSE ALGÉBRIQUE,
APPLIQUÉES A LA RECHERCHE
DES LIEUX GÉOMÉTRIQUES;

PAR SIMON LHUILIER,

Professeur de Mathématiques à l'Académie de Genève, Membre de plusieurs Corps littéraires.

Alterius rei
Altera poscit opem res, et conspirat amicè.
LUCR. de Nat. rerum.

A PARIS,

Chez J. J. PASCHOUD, Libraire, Quai des Grands-Augustins, N.° 11, près le pont Saint-Michel.

Et A GENÈVE, chez le même Libraire.

1809.

Digitized by Google

A SON ALTESSE

MONSEIGNEUR

LE PRINCE CZARTORINSKI,

Un des Membres du Conseil d'Etat de SA MAJESTÉ L'EMPEREUR DE RUSSIE, *et du Conseil d'Instruction publique, Curateur de l'Université de Wilna, Chevalier de plusieurs Ordres.*

MONSEIGNEUR,

En mettant de nouveau sous les yeux de Votre Altesse une partie des Elémens d'une Science dont j'ai eu l'honneur de l'occuper avec succès dès sa première jeunesse, et aux progrès de laquelle Elle prend un vif intérêt; je n'aspire pas à la distraire des occupations auxquelles l'appellent ses talens et les

Digitized by Google

places qu'Elle occupe. Si Votre Altesse honore de son approbation l'ouvrage que je prends la liberté de lui présenter ; si Elle en recommande l'introduction dans ceux des établissemens d'instruction d'un vaste Empire qui sont soumis à son inspection ; si Elle croit qu'il peut contribuer à y répandre le goût d'une science dont Elle sent le prix ; je pourrai me rendre le témoignage satisfaisant d'avoir fait un Ouvrage utile.

Agréez, Monseigneur, les assurances du dévouement respectueux avec lequel j'ai l'honneur d'être,

De Votre Altesse,

Le très-humble et très-reconnoissant
serviteur,

LHUILIER.

Genève, 1.er Juillet 1809.

Digitized by Google

AVANT-PROPOS.

Le Traité d'Apollonius de Perge, intitulé des Lieux plans, est, après les Coniques de ce grand Géomètre, celui de ses ouvrages qui a le plus attiré l'attention des Mathématiciens modernes. Le célèbre Fermat s'est appliqué à le rétablir; quoique son travail ait été imprimé en 1670, il est antérieur à celui de Schooten sur le même sujet, publié en 1657. Mais la marche presque entièrement algébrique de l'un et de l'autre de ces Mathématiciens, ne peut être comparée, pour la simplicité et pour l'élégance, aux procédés géométriques.

R. Simson, Professeur de Mathématiques à l'Université de Glasgow, a publié en 1749 une restitution de l'ouvrage d'Apollonius, qui (à en juger par les autres monumens des ouvrages géométriques des anciens, tels que la *Sectio rationis*, et la *Sectio spatii*, publiées par Halley) se rapproche probablement beaucoup du travail du Géomètre ancien. Guidé par les traces qui se trouvent dans les collections de Pappus, et sur-tout par la Préface du VII.e Livre; le Mathématicien écossois a réuni en corps de doctrine et complété les matériaux épars et imparfaits transmis par Pappus.

L'ouvrage de Simson a été traduit en allemand par Camerer, l'un des élèves de mon excellent ami M. Pfleiderer, Professeur à l'Université de Tubingue, qui est également versé dans la Géométrie ancienne et dans les méthodes modernes. Le traducteur a enrichi son ouvrage d'un grand nombre de notes, d'additions et d'applications, qui rendent son travail une production originale.

Je me proposois de faire paroître dans notre langue l'ouvrage de

Digitized by Google

SIMSON. Mais, après y avoir long-tems réfléchi, j'ai cru qu'une exposition libre de cet ouvrage, suivant moi susceptible de changemens et d'abréviations considérables, sans en diminuer le prix, seroit plus agréable au plus grand nombre des Mathématiciens du continent.

Et d'abord, je n'ai pas cru devoir traiter en détail plusieurs lieux à la ligne droite et à la circonférence du cercle, connus par les premiers élémens; et je me suis contenté de les exposer sommairement, ainsi que je l'ai fait dans le début du Chap. I.er (Voy. § 26).

J'ai cru devoir omettre plusieurs lieux relatifs à des droites parallèles entr'elles, que SIMSON traite (à mon avis) avec trop de détail; et je me suis contenté de montrer, par une observation générale, comment ils se réduisent à des problèmes déterminés (Voyez § 27).

La division de l'ouvrage de SIMSON en deux livres (conformément à la préface de PAPPUS déjà citée) ne m'a pas frappé; et je n'ai pu me rendre raison d'une manière satisfaisante du principe de cette division. En conséquence, la première partie du premier Chapitre de l'ouvrage que je publie, présente (d'une manière libre) l'ouvrage de SIMSON sans aucune subdivision.

Quoique l'ouvrage de SIMSON se distingue par l'élégance du développement du plus grand nombre des propositions qui y sont contenues, il m'a paru cependant que quelques-unes d'entr'elles pouvoient être présentées d'une manière plus concise et plus générale; tels sont en particulier les lieux à la ligne droite qui sont l'objet des §§ 34-37 de l'ouvrage suivant: ils me paroissent traités par SIMSON d'une manière incomplète.

J'ai remarqué dans plusieurs cas la liaison qui règne entre différens lieux, et les réductions mutuelles des uns aux autres. Voyez par exemple, les §§ 28 et 30, et les §§ 44-46.

J'ai saisi avec empressement l'occasion d'éclaircir la doctrine des Porismes (entendue suivant le sentiment de SIMSON), en montrant la liaison

liaison de ce genre de propositions avec les propositions locales; et en joignant aux principales de ces dernières, celles des premières qui y sont relatives.

La seconde partie du premier Chapitre expose plusieurs propriétés locales de la ligne droite et de la circonférence du cercle qui n'ont pas été traitées par SIMSON, et qui probablement n'étoient pas traitées par APOLLONIUS. Les principales d'entr'elles sont relatives à la section harmonique, si féconde en applications importantes.

SIMSON, voulant présenter son travail comme un monument de la méthode purement géométrique, s'est abstenu de toute application du calcul, soit à ses analyses soit à ses constructions. Sans rendre mon travail moins géométrique, j'ai cru ne devoir pas être aussi scrupuleux, lorsque cette application me paroissoit propre à éclaircir et à faciliter mon sujet. En particulier, la symbolisation introduite dans les §§ 40-42, me paroît très-convenable pour rendre le développement du sujet qui y est traité plus lumineux et plus synoptique.

Après avoir traité géométriquement les lieux à la ligne droite et à la circonférence du cercle; en me rapprochant, autant que cela m'a paru convenable, de la marche de SIMSON : j'abandonne complètement ce Géomètre, et je me livre à la méthode purement algébrique. Je pose dans le chapitre second les principes généraux de cette seconde méthode; j'établis les équations de la ligne droite et de la circonférence du cercle; j'en fais voir les applications en discutant les positions mutuelles de ces lignes, en tant qu'elles sont déterminées par leurs équations. Je montre ensuite comment les principales propriétés locales de la ligne droite et de la circonférence, traitées dans le premier Chapitre par la voie géométrique, auroient pu être obtenues par un procédé purement algébrique.

SIMSON a borné son travail à ce qui concerne les deux lignes dont

la contemplation fait l'objet des élémens. Dans le troisième et dans le quatrième Chapitre je traite des lieux au plan et à la surface sphérique, successivement suivant chacune des deux méthodes employées dans les deux Chapitres précédens. L'équation du plan, exprimée dans la perpendiculaire abaissée sur lui depuis l'origine des coordonnées, et dans les angles que cette perpendiculaire fait avec les axes des coordonnées, me paroît plus lumineuse et d'une application plus facile que ne l'est celle qui est ordinairement employée.

Je me proposois de traiter de la même manière la surface cylindrique et la surface conique, dont la contemplation appartient aussi aux élémens; mais comme ces deux surfaces ne peuvent être traitées d'une manière complète et satisfaisante, sans entrer dans la discussion des courbes du second ordre engendrées par les sections de ces surfaces par un plan, et que la réunion de ce travail au premier auroit rendu mon Ouvrage trop volumineux; je me suis déterminé à séparer la partie purement élémentaire d'avec celle qui est regardée comme supérieure aux élémens. Je ne tarderai pas à publier cette seconde partie, si mes forces et mes occupations me permettent d'y mettre la dernière main.

Comme les développemens des propositions les plus importantes contenues dans le premier Chapitre et dans le troisième, relatifs à la méthode géométrique, sont fondés essentiellement sur les propriétés du point appelé en mécanique *centre de gravité*, et que j'appelle en géométrie *centre des moyennes distances*; j'ai cru devoir faire précéder mon Ouvrage d'une Dissertation préliminaire, destinée à lui servir d'introduction; dans laquelle je réunis les propriétés purement mathématiques de ce point, indépendamment de toute application aux parties mixtes des mathématiques. Pour compléter cette doctrine, je l'ai étendue au-delà de ses applications à mon objet présent. Ainsi,

Digitized by Google

quoique les Théorèmes connus sous le nom de Règle de GULDIN ne trouvent pas des applications au sujet que je me propose principalement de traiter; cependant, j'ai cru devoir les développer dans cette dissertation, afin de ne rien laisser à désirer sur les propriétés remarquables de ce point, même envisagées sous un point de vue purement abstrait. Au reste, la dénomination que j'emploie n'est pas nouvelle, elle a déjà été introduite par CARNOT dans son ouvrage philosophico-mathématique, intitulé *Géométrie de position*, pages 315 et suivantes. En réunissant en corps de doctrine les propriétés du centre des moyennes distances, j'espère avoir rempli le vide que les Élémens de géométrie présentent à cet égard, et dont ce Mathématicien philosophe se plaint avec raison.

Pour faire mieux sentir l'importance de la doctrine des lieux géométriques, je développe dans un cinquième Chapitre leur application à la solution des problèmes élémentaires déterminés. Je montre, par un petit nombre d'exemples simples, que cette application a lieu dès le début des Élémens. Je confirme ensuite l'utilité de cette application par des problèmes plus composés, parmi lesquels il me suffira de citer le problème remarquable développé dans les §§ 146-148. A un cercle donné inscrire un polygone dont les côtés soient parallèles à des droites données de position, ou passent par des points donnés de position.

Je ne dois pas terminer cette Introduction sans payer à l'amitié un juste tribut de reconnoissance. M. SCHAUB, mon compatriote, profondément versé dans toutes les parties des Mathématiques, et principalement connu par les succès avec lesquels il a formé de nombreux élèves, a eu la complaisance de lire mon manuscrit avant qu'il fût livré à l'impression, et de me faire (avec la modestie qui relève ses connoissances) des remarques dont je me suis empressé de profiter.

Digitized by Google

Il a poussé la complaisance jusqu'à se prêter à surveiller l'impression. Aidé à cet égard de ses soins, et de ceux de M. PAULET (jeune Mathématicien plein de zèle et de talens), je crois pouvoir assurer le lecteur que la partie typographique, dont l'exactitude est si importante dans les sciences abstraites, ne laisse rien à désirer.

J'aurai rempli mon but, je serai suffisamment récompensé de mon travail, s'il fournit aux jeunes Géomètres des exercices utiles, propres à les fortifier dans les Élémens, et à développer leurs facultés intellectuelles; s'il peut contribuer à prévenir la précipitation avec laquelle ils sont tentés d'aborder les parties supérieures des Mathématiques, avant de s'y être rendus propres par des études élémentaires solides et approfondies; s'il est regardé par les grands Géomètres qui établissent sur des bases solides la gloire de notre siècle, d'une part, comme étant un supplément utile aux Ouvrages élémentaires, à la composition desquels quelques-uns d'entr'eux n'ont pas dédaigné de consacrer un tems précieux, et de l'autre, comme une introduction tendant à faciliter l'intelligence de leurs profondes et sublimes productions.

GENÈVE, 1.er *Juillet 1809.*

DISSERTATION PRÉLIMINAIRE.

SUR LE CENTRE DES MOYENNES DISTANCES.

Le développement de quelques-unes des propositions locales exposées dans cet ouvrage, et en particulier celui des plus importantes d'entr'elles, repose sur les propriétés du *centre des moyennes distances* (appelé en mécanique *centre de gravité*). En conséquence, je crois devoir les résumer dans cette Dissertation, pour servir d'introduction à cet ouvrage. Considérant d'une part leur importance, même en les envisageant sous un point de vue purement abstrait et géométrique, indépendamment de toute application aux parties mixtes des mathématiques, et de l'autre part la facilité avec laquelle elles peuvent être démontrées sans l'introduction d'aucun principe étranger aux mathématiques pures; je pense que leur exposition devroit entrer dans les traités élémentaires des mathématiques pures, et je regrette qu'elle n'y ait pas été introduite jusqu'à présent.

§. 1.

Théorème. Soient trois points donnés de position sur une même droite, et soit une droite quelconque qui ne rencontre pas la première entre ces points. De ces trois points soient abaissées sur cette droite des perpendiculaires, et soient pris les rectangles de chacune de ces perpendiculaires par la distance des deux points restans. J'affirme que la somme des rectangles répondans aux deux points extérieurs, est égale au rectangle répondant au point intermédiaire.

Soient A, A', A'', trois points donnés sur une même droite. De ces points soient abaissées sur une autre droite (qui ne rencontre pas la première entre ces points) les perpendiculaires AB, A'B', A''B''. Soient pris les rectangles AB × A'A'', A'B' × AA'', A''B'' × AA', et soit le point A'' situé entre A et A'. J'affirme que AB × A'A'' + A'B' × AA'' = A''B'' × AA'. Fig. 1.

Constr. Par A'' soit menée à BB' une parallèle qui rencontre les perpendiculaires AB, et A'B' en a et en a' : et soit par exemple A'B' > AB.

$AB = A''B'' - Aa$; $AB \times A'A' = A''B'' \times A'A'' - Aa \times A'A''$

$A'B' = A''B'' + A'a'$; $A'B' \times AA'' = A''B'' \times AA'' + A'a' \times AA''$

Or, les triangles $AA''a$, $A'A''a'$, sont semblables : partant, $AA'' : A'A'' = Aa : A'a'$; donc, $AA'' \times A'a' = A'A'' \times Aa$; donc, $AB \times A'A'' + A'B' \times AA'' = A''B'' (AA'' + A'A'') = A''B'' \times AA'$.

Fig. 2. *Remarque* 1. Que la droite BB' sur laquelle on abaisse les perpendiculaires rencontre AA' entre A et A' : par exemple entre A' et A''; la perpendiculaire abaissée du point A' change de direction et partant de signe, et on a l'équation $AB \times A'A'' - A'B' \times AA'' = A''B'' \times AA'$.

En particulier; lorsque la droite sur laquelle on abaisse les perpendiculaires passe par A'', la droite A''B'' évanouit, et on a l'équation, $AB \times A'A'' - A'B' \times AA'' = 0$, ou $AB \times A'A'' = A'B' \times AA''$.

Remarque 2. Que le point A'' soit sur la droite AA' prolongée, par exemple de A vers A'.

On a; $AB \times A'A'' + A''B'' \times AA' = A'B' \times AA''$, ou

$A''B'' \times AA' = A'B' \times AA'' - AB \times A'A''$; le changement de signe du rectangle $AB \times A'A''$ répond au changement de direction de la droite A'A''; et les termes de cette équation peuvent subir des changemens de signe correspondans aux changemens de direction des perpendiculaires.

Remarque 3. Soient m et m' des nombres donnés; sur AA' soit déterminé le point A'' de manière que $AA'' : A'A'' = m' : m$; ou $AA'' \times m = A'A'' \times m'$. Des points A, A', A'', soient abaissées sur une même droite des perpendiculaires

1.° Soit A'' entre A et A', on a $m \times AB + m' \times A'B' = (m + m') A''B''$, lorsque les points A, A' et A'' sont du même côté de la droite menée; et $m \times AB - m' \times A'B' = (m + m') A''B''$; lorsque A et A'' sont d'un même côté de cette droite, et A' du côté opposé.

2.° En supposant $m' > m$; soit A'' sur AA' prolongée de A en A', on a $m' \times A'B' - m \times AB = (m' - m) A''B''$; en supposant les points A, A', A'', du même côté de la droite sur laquelle on abaisse les perpendiculaires.

§ 2.

Définition. Lorsque le point A'' est entre les points A et A', il est appelé le *centre des moyennes distances* des points A et A' relativement aux coefficiens m et m'.

Soit A'' sur AA' prolongée de A en A'. Le point A'' sera appelé l'*excentre des moyennes distances* des points A et A' pour les mêmes coefficiens. Symbolique-

Digitized by Google

ment parlant ; le point A'' est le centre des moyennes distances des points A et A' pour les coefficiens $-m$ et $+m'$; en supposant $m' > m$. Lorsque $m = m'$, le point A'' ne peut pas être déterminé.

En général. Soient A, A', A'', A''' ..... A^x, des points donnés de position sur un plan, et soient m, m', m'', m''' ..... m^x des coefficiens correspondans donnés de grandeur. Sur une droite quelconque située hors du système de ces points, soient abaissées des perpendiculaires AB, A'B', A''B'', A'''B''' ... A^xB^x; soient pris les produits de ces perpendiculaires par les coefficiens correspondans donnés. Si on peut déterminer un point Z, tel que le produit de la perpendiculaire ZY abaissée sur la même droite depuis ce point par la somme des coefficiens m, m', m'', m''' .... m^x est égal à la somme des premiers produits : ce point Z est appelé le *centre des moyennes distances* des points A, A', A'', A''' .... A^x, relativement aux coefficiens correspondans m, m', m'', m''' .... m^x.

Pour abréger : cette propriété sera exprimée symboliquement comme il suit, $f.\ m^x \times A^xB^x = ZY \times f.\ m^x$.

Que quelques-unes des perpendiculaires abaissées des premiers points changent de direction relativement à la droite sur laquelle on les abaisse ; ce qui a lieu lorsque la droite sur laquelle on les abaisse traverse le système des points donnés, et partant, lorsque ces points sont situés des deux côtés de cette droite. A la somme des rectangles on substitue l'excès de la somme des rectangles correspondans aux perpendiculaires qui ont la même direction que ZY sur la somme des rectangles correspondans aux perpendiculaires qui ont une direction opposée.

En particulier : que la droite sur laquelle on abaisse les perpendiculaires passe par le point Z ; les sommes des rectangles correspondans aux points situés des deux côtés de cette droite sont égales entr'elles, ou leur différence est zéro.

En supposant que les perpendiculaires ont une même direction relativement à la droite sur laquelle elles sont abaissées ; si quelques-uns des coefficiens donnés changent de signes, la somme proposée devient une différence ; et le point Z correspondant à cette supposition, sera appelé *excentre* des moyennes distances des points donnés pour les coefficiens donnés.

Lorsque tous les coefficiens donnés sont égaux entr'eux, et en particulier égaux à l'unité ; le point Z est le centre simple des moyennes distances des points donnés, et la perpendiculaire ZY prise autant de fois qu'il y a de points est égale à la somme des perpendiculaires abaissées des points donnés.

Digitized by Google

§ 5.

Fig. 3. *Théorème.* Soient trois points donnés de position, et soient trois coefficiens correspondans donnés de grandeur. J'affirme qu'on peut trouver le centre des moyennes distances de ces trois points correspondans à ces coefficiens.

Soient A, A′, A″, trois points donnés de position; et soient m, m′, m″, trois coefficiens correspondans donnés de grandeur. J'affirme qu'on peut déterminer le point Z tel, qu'abaissant sur une droite quelconque des perpendiculaires AB, A′B, A″B″ et ZY, toutes dirigées dans un même sens relativement à cette droite, on ait l'équation :

$$m \times AB + m' \times A'B' + m'' \times A''B'' = ZY\,(m+m'+m'').$$

En effet : soit z le centre des moyennes distances des points A et A′ pour les coefficiens m et m'; et soit Z le centre des moyennes distances des points A″ et z pour les coefficiens m'' et $m+m'$. On a, $m \times AB + m' \times A'B' = zy\,(m+m')$.

Donc, $m \times AB + m' \times A'B' + m'' \times A''B'' = zy\,(m+m') + m'' \times A''B''$.

Mais, $zy\,(m+m') + m'' \times A''B'' = ZY\,(m+m'+m'')$; donc,

$$m \times AB + m' \times A'B' + m'' \times A''B'' = ZY\,(m+m'+m'').$$

Remarque 1. La position du point Z doit être la même, quels que soient les deux points dont on combine le centre des moyennes distances avec le troisième. Il faut donc prouver que les droites AZ et A′Z rencontrent les côtés A′A″, et AA″, dans les centres des moyennes distances de leurs extrémités pour les coefficiens correspondans, et que ces droites sont aussi coupées en Z de manière que ce point est le centre des moyennes distances de leurs extrémités. C'est ce que je fais comme il suit :

Soit z le centre des moyennes distances des points A et A′ pour les coefficiens m et m′; et soit z' le centre des moyennes distances des points A′ et A″ pour les coefficiens m′ et m″; que les droites A″z et Az' se coupent en Z; j'affirme que Z est le centre des moyennes distances des points A, A′, A″, pour les coefficiens m, m′, m″.

Par z soit menée à A′A″ une parallèle qui rencontre Az' en t.

Par construction : $A''z' : A'z' = m' : m''$

$$\text{et } A'z' : tz = AA' : Az$$
$$= m+m' : m'$$
$$\text{donc, } A''z' : tz = m+m' : m''$$
$$\text{Mais, } A''z' : tz = A''Z : Zz$$
$$\text{Donc, } A''Z : Zz = m+m' : m''.$$

Donc le point Z est le centre des moyennes distances des points A″ et z pour les

les coefficiens m'' et $m+m'$; et partant il est le centre des moyennes distances des points A, A', A'', pour les coefficiens m, m', m''.

On montre de même, que $AZ : Zz' = m' + m'' : m$.

Item ; la droite menée de A' au centre des moyennes distances des points A et A'' pour les coefficiens m et m'' coupe la droite A''z dans le même point Z ; partant le point Z est bien le centre des moyennes distances des points A, A', A'' pour les coefficiens m, m', m''; et ce point est unique.

Remarque 2. En particulier : que les coefficiens m, m', m'' soient égaux entr'eux. Le point Z se trouve en joignant les sommets du triangle AA'A'' avec les milieux des côtés opposés, par des droites ; le point de section de ces trois droites est un point unique, et chacune d'elles est coupée en deux parties, dont l'une située du côté du sommet est double de l'autre.

Corollaire. Soit AB A'B' un parallélogramme dont les diagonales AA', BB', se coupent en C ; soit prolongée une des diagonales B'B d'une quantité BA'' égale à cette diagonale elle-même. J'affirme que le point B est le centre des moyennes distances des points A, A', A''. Fig. 4.

En effet, dans le triangle AA'A'', la droite A''C est menée au milieu du côté opposé AA', et elle est coupée en B en deux parties dont l'une BA'' est double de l'autre BC.

Corollaire 2. Soit AB A'B' un parallélogramme. Par un des sommets B de ce parallélogramme soit menée une droite quelconque extérieure au parallélogramme. Sur cette droite soient abaissées depuis les sommets restans A, B', A', des perpendiculaires Aa, B'b', A'a'. J'affirme que la somme des deux perpendiculaires extrêmes est égale à la troisième.

En effet ; soit prolongée la diagonale B'B en A'' d'une quantité BA'' égale à BB' ; et soit A''a'' perpendiculaire à la droite menée à volonté.

Puisque le point B est le centre des moyennes distances des points A, A', A'', et que les points A et A' sont situés d'un côté de la droite aa' tandis que A'' est situé du côté opposé : $A''a'' = Aa + A'a'$; mais, $A''a'' = B'b'$; donc, $B'b' = Aa + A'a'$.

Autrement. Soit C le point de section des diagonales AA', BB', et soit Co perpendiculaire à aa', $Aa + A'a' = 2Cc$; mais, $BB' = 2BC$; donc, $B'b' = 2Cc$; donc $Aa + A'a' = B'b'$.

On a aussi $Ba - Ba' = Bb'$,

Lorsque la droite sur laquelle on abaisse les perpendiculaires passe en dedans du parallélogramme, la somme des segmens retranchés de cette droite, à compter depuis le point B, par les perpendiculaires abaissées des points A et A'

est égale au segment retranché de la même droite par la perpendiculaire abaissée du point B′ ; et en particulier, si des points A et A′ on abaisse des perpendiculaires sur la diagonale BB′, cette diagonale est égale à la somme de ses segmens retranchés par les perpendiculaires abaissées sur elle des points A et A′

Corollaire 3. Chaque diagonale d'un parallélogramme passe par le centre des moyennes distances d'une de ses extrémités et des deux sommets restans, et elle est coupée à ces deux centres en trois parties égales.

Dans le parallélogramme AB A′B′ dont les diagonales se coupent en C en deux parties égales ; soit menée la droite B′z au milieu de AB, laquelle rencontre en Z la diagonale AA′.

Dans le triangle ABB′, le point Z est le centre des moyennes distances des points A, B, B′; et B′Z = 2Zz. Mais les triangles AZz, A′ZB′ sont semblables ; et partant AZ : A′Z = Zz : B′Z; donc aussi A′Z = 2AZ.

Calcul. Soient α, α' et C les angles que la droite sur laquelle on abaisse les perpendiculaires fait avec les droites BA, BA′ et BB′, on a l'équation $BA\cos\alpha + BA'\cos\alpha' = BB'\cos C$; en supposant que la droite menée est intérieure au parallélogramme, et $BA\sin\alpha + BA'\sin\alpha' = BB'\sin C$, lorsque la droite sur laquelle on abaisse les perpendiculaires est extérieure au parallélogramme.

Item ; dans le premier cas, $BA\sin\alpha - BA'\sin\alpha' = BB'\sin C$.

dans le second cas, $BA\cos\alpha - BA'\cos\alpha' = BB'\cos C$.

§ 4.

Théorème. Soient A, A′, A″, A‴ quatre points donnés de position sur un plan, et soient m, m′, m″, m‴, quatre coefficiens donnés correspondans. J'affirme qu'on peut déterminer le centre Z de leurs moyennes distances pour les coefficiens donnés.

Soit z le centre des moyennes distances de deux des points donnés, tels que A et A″ pour les coefficiens correspondans m et m''. Soit z' le centre des moyennes distances des deux points restans, A′ et A‴ pour les coefficiens correspondans m′ et m‴ ; soit Z le centre des moyennes distances des points z et z' pour les coefficiens $m + m''$ et $m' + m'''$. Ce point sera le centre des moyennes distances des points proposés pour les coefficiens donnés.

En effet : Soient AB, A′B′, A″B″, A‴B‴ les perpendiculaires abaissées des points donnés sur une droite quelconque extérieure au système de ces points. Et soient zy, $z'y'$, ZY, les perpendiculaires abaissées des points z, z', Z sur la même droite. On a les équations

$m \times AB + m'' \times A''B'' = (m + m'')\, zy.$
$m' \times A'B' + m''' \times A'''B''' = (m' + m''')\, z'y'.$

Donc, $m \times AB + m' \times A'B' + m'' \times A''B'' + m''' \times A'''B''' = (m + m'')\, zy + (m' + m''')\, z'y' = (m + m' + m'' + m''')\, ZY.$

Remarque 1. Le point Z est unique ; et on parvient à un seul et même résultat, quelle que soit la manière dont on combine deux à deux les points donnés.

Remarque 2. Lorsque les coefficiens m, m', m'', m''', sont tous égaux entr'eux ; le point Z est le point de section des diagonales du parallélogramme dont les sommets sont les milieux des côtés du quadrilatère $AA'A''A'''$. En particulier, lorsque le quadrilatère $AA'A''A'''$ est un parallélogramme, le point Z est le point de section de ses diagonales.

§ 5.

Théorème. Qu'il ait été prouvé que pour des points $A, A', A'', A''' \ldots A^{x-1}, A^x$, donnés de position, on peut trouver le centre de leurs moyennes distances pour les coefficiens donnés correspondans, $m, m', m'', m''' \ldots m^x$. Soit A^{x+1} un point de plus, et soit m^{x+1} un coefficient correspondant. J'affirme qu'on peut trouver aussi le centre des moyennes distances de tous ces points pour les coefficiens correspondans.

En effet, soit z le centre des moyennes distances de tous les premiers points, et soit zy la perpendiculaire abaissée de ce point sur une droite quelconque. Soit Z le centre des moyennes distances du point z et du point A^{x+1} pour les coefficiens m^x et m^{x+1}, et soit ZY perpendiculaire à la même droite.

Par supposition, $f.\ m^x A^x B^x = zy\, f.\ m^x$.

Donc, $f.\ m^x A^x B^x + m^{x+1} \times A^{x+1} B^{x+1} = zy\, f.\ m^x + m^{x+1} \times A^{x+1} B^{x+1}$.

Ou, $f.\ m^{x+1} \times A^{x+1} B^{x+1} = zy\, f.\ m^x + m^{x+1} \times A^{x+1} B^{x+1}$.

Mais, $zy\, f.\ m^x + m^{x+1} \times A^{x+1} B^{x+1} = ZY\, f.\ m^{x+1}$.

Donc, $f\, m^{x+1} A^{x+1} B^{x+1} = ZY\, f.\ m^{x+1}$.

Or ; la détermination du centre des moyennes distances a été prouvée possible pour des points en petit nombre, tels que 2, 3, 4 ; donc, augmentant successivement le nombre des points d'une unité, elle est possible pour un nombre quelconque de points.

Partant ; des points en nombre quelconque étant donnés de position sur un plan ; et des coefficiens correspondans étant donnés de grandeur, on peut trouver en même tems la position d'un point et la grandeur d'un coefficient

Digitized by Google

correspondant, de manière qu'abaissant des premiers points et du point à déterminer des perpendiculaires sur une droite quelconque; et prenant les produits de ces perpendiculaires par les coefficiens correspondans, la somme des premiers produits soit égale au produit de la perpendiculaire abaissée du point à déterminer, par le coefficient correspondant à déterminer. Savoir; Z est le centre des moyennes distances de tous les premiers points donnés pour les coefficiens donnés; et on a l'équation $f.\ m^x \times A^x B^x = ZY f.\ m^x$.

Remarque. La détermination du centre des moyennes distances d'un nombre proposé de points pour des coefficiens correspondans donnés, exécutée conformément au procédé précédent, paroît avoir l'inconvénient de supposer connus les centres des moyennes distances de points donnés pour tous les nombres inférieurs au nombre proposé. On peut dégager cette détermination de cet inconvénient, en l'exécutant immédiatement sur un nombre quelconque de points, de la manière suivante.

§ 6.

D'un même point soient menées deux droites quelconques, par exemple perpendiculaires l'une à l'autre; lesquelles soient prises pour axes. Depuis tous les points donnés soient abaissées sur ces deux axes des perpendiculaires; soient pris les produits de ces perpendiculaires par les coefficiens correspondans donnés de grandeur, et soient prises les deux sommes de ces produits. Soit divisée chacune de ces deux sommes par la somme des coefficiens donnés, et soient prises les deux droites qui sont les résultats de cette division. Soient élevées des perpendiculaires aux deux axes respectivement égales à ces deux droites; par les sommets de ces perpendiculaires soient menées des droites respectivement parallèles à ces axes; le point de section de ces parallèles est le centre des moyennes distances des points donnés pour les coefficiens donnés.

Ce point de section jouit (par la construction) de la propriété du centre des moyennes distances relativement aux deux droites prises pour axes. Il faut prouver qu'il en jouit aussi relativement à toute autre droite.

Il est évident qu'il en jouit relativement à toute autre droite parallèle à l'un des axes, puisque toutes les perpendiculaires relatives à cette autre droite diffèrent des premières d'une même quantité. Il suffit donc de prouver que le point de section des deux droites parallèles aux axes, jouit de la propriété du centre des moyennes distances relativement à une droite menée par l'origine, faisant

faisant avec les axes des angles quelconques, d'où il suit qu'il en jouit aussi relativement à toute autre droite parallèle à cette dernière.

Soit *S* l'origine ou le point de section des deux axes, et soit A un point depuis lequel on abaisse sur les axes les perpendiculaires AB et Ab ; par *S* soit menée toute autre droite sur laquelle soit abaissée la perpendiculaire AC.

On a (§. 3.°) AC=SA sin. ASC=AB cos. BSC+Ab sin. BSC : appliquant cette équation à tous les points donnés on a l'équation, $f.\ m^x\ A^x\ C^x = \cos.\ BSC \times f.\ m^x A^x B^x + \sin.\ BSC\ f.\ m^x A^x b^x$. Soient ZY et Zy, les perpendiculaires abaissées du centre Z des moyennes distances sur les deux axes; et soit ZV la perpendiculaire abaissée du même centre sur la troisième droite SC, on a : FIG. 5.

$$f.\ m^x\ A^x\ C^x = \cos.\ BSC \times ZY\ f.\ m^x + \sin.\ BSC \times Zy\ f.\ m^x$$
$$= f.\ m^x\ (ZY \cos.\ BSC + Zy \sin BSC.) = ZV\ f.\ m^x.$$

Donc le point Z qui jouit de la propriété du centre des moyennes distances relativement à deux droites perpendiculaires entr'elles, en jouit aussi relativement à toute autre droite faisant avec les premières des angles quelconques.

§ 7.

Il y a quelques figures pour lesquelles le centre des moyennes distances de leurs sommets se détermine sans aucune difficulté.

Lorsque dans une figure il y a un point qui coupe en deux parties égales toutes les droites menées par ce point et terminées à son contour ; ce point est appelé son *centre de figure*. Si une figure a un centre de figure, il est en même tems le centre des moyennes distances de ses sommets : savoir, la perpendiculaire abaissée de ce centre sur une droite quelconque, prise autant de fois qu'il y a de sommets, est égale à la somme des perpendiculaires abaissées de ces sommets. Ainsi le point de section des diagonales d'un parallélogramme est le centre des moyennes distances de ses sommets ; et le centre d'une figure régulière d'un nombre pair de côtés est aussi le centre des moyennes distances de ses sommets. J'affirme qu'il en est de même pour les figures régulières d'un nombre impair de côtés.

En effet : soient joints par des droites les milieux des côtés alternatifs d'une figure régulière F d'un nombre de côtés impairement pair ; on obtient une figure régulière F′ d'un nombre impair de côtés, dont les sommets sont les milieux de ces côtés alternatifs. La somme des perpendiculaires abaissées des extrémités d'un des côtés de la figure F sur lequel est un sommet de la figure F′, est double de la perpendiculaire abaissée du sommet de la figure F′ qui est sur ce côté ; donc, la somme des perpendiculaires abaissées des sommets de la figure F, est double de la somme des perpendiculaires abaissées des sommets de

la figure F′ ; mais la première somme est égale à la perpendiculaire abaissée du centre prise autant de fois que la première figure a de côtés, et partant elle est double de la perpendiculaire abaissée du centre prise autant de fois que la seconde figure a de côtés ; donc, la somme des perpendiculaires abaissées des sommets de la seconde figure, est égale à la perpendiculaire abaissée de son centre, prise autant de fois qu'elle a de côtés.

§ 8.

Soient prises pour axes successivement chacune des droites menées du centre Z des moyennes distances aux points A, A′, A″, A‴ .... A^N, on a les équations.

$$m\times ZA+m'\times ZA'\cos.AZA'+m''\times ZA''\cos.AZA''+m'''\times ZA'''\cos.AZA'''+\ldots+m^N\times ZA^N\cos.AZA^N=0,$$
$$m\times ZA\cos.A'ZA+m'\times ZA'+m''\times ZA''\cos.A'ZA''+m'''\times ZA'''\cos.A'ZA'''+\ldots+m^N\times ZA^N\cos.A'ZA^N=0,$$
$$m\times ZA\cos.A''ZA+m'\times ZA'\cos.A''ZA'+m''\times ZA''+m'''\times ZA'''\cos.A''ZA'''+\ldots+m^N\times ZA^N\cos.A''ZA^N=0,$$
$$m\times ZA\cos.A'''ZA+m'\times ZA'\cos.A'''ZA'+m''\times ZA''\cos.A'''ZA''+m'''\times ZA'''+\ldots+m^N\times ZA^N\cos.A'''ZA^N=0,$$

$$m\times ZA\cos.A^NZA+m'\times ZA'\cos.A^NZA'+m''\times ZA''\cos.A^NZA''+m'''ZA'''\cos.A^NZA'''+\ldots+m^N\times ZA^N=0.$$

§. 9.

Soient multipliés les premiers membres de ces équations successives respectivement par $m\times ZA$, $m'\times ZA'$, $m''\times ZA''$, $m'''\times ZA'''$... $m^N\times ZA^N$; et soient prises les sommes de tous les produits, on obtient l'équation :

$$mm\times ZA+m'm'\times ZA'^2+m''m''\times ZA''+m'''m'''\times ZA'''+\ldots+m^Nm^N\times ZA^{N2}$$
$$+2mm'AZ\times ZA'\cos.AZA'+2mm''AZ\times ZA''\cos.AZA''+2mm'''AZ\times ZA'''\cos.AZA'''+\ldots+2mm^NAZ\times ZA^N\cos.AZA^N$$
$$+2m'm''A'Z\times ZA''\cos.A'ZA''+2m'm'''A'Z\times ZA'''\cos.A'ZA'''+\ldots+2m'm^NA'Z\times ZA^N\cos.A'ZA^N$$
$$+2m''m'''A''Z\times ZA'''\cos.A''ZA'''+\ldots+2m''m^NA''Z\times ZA^N\cos.A''ZA^N$$
$$+2m'''m^NA'''Z\times ZA^N\cos.A'''ZA^N$$

$$+2m^{N-1}m^NA^{N-1}Z\times ZA^N\cos.A^{N-1}ZA^N=0$$

§ 10.

Dans cette équation soit substituée $-mAZ$ à sa valeur $m'A'Z\cos.AZA'+m''\times A''Z\cos.AZA''+m'''\times A'''Z\cos.AZA'''+\ldots+m^N\times A^NZ\cos.AZA^N$; on obtient l'équation :

$$mmZA^2=m'm'\times ZA'^2+m''m''\times ZA''^2+m'''m'''\times ZA'''^2+\ldots+m^Nm^NZA^{N2}$$
$$+2m'm''A'Z\times ZA''\cos.A'ZA''+2m'm'''A'Z\times ZA'''\cos.A'ZA'''\ldots+2m'm^NA'Z\times ZA^N\cos.A'ZA^N$$
$$+2m''m'''A''Z\times ZA'''\cos.A''ZA'''\ldots+2m''m^NA''Z\times ZA^N\cos.A''ZA^N$$
$$+2m'''m^NA'''Z\times ZA^N\cos.A'''ZA^N$$

$$+2m^{N-1}m^NA^{N-1}Z\times ZA^N\cos.A^{N-1}ZA^N$$

Digitized by Google

En particulier, que tous les coefficiens m, m′, m″, m‴ ... m^x soient égaux entr'eux, on a :

$$ZA^2 = ZA'^2 + ZA''^2 + ZA'''^2 + \ldots\ldots + ZA^{x2}$$
$$+2A'Z\times ZA'' \cos.A'ZA'' + 2A'Z\times ZA''' \cos.A'ZA''' \ldots + 2A'Z\times ZA^x \cos.A'ZA^x$$
$$+2A''Z\times ZA''' \cos.A''ZA''' \ldots + 2A''Z\times ZA^x \cos.A''ZA^x$$
$$+2A'''Z\times ZA^x \cos.A'''ZA^x$$

$$+2A^{x-1}Z\times ZA^x \cos.A^{x-1}ZA^x$$

Savoir : le carré de la distance du centre des moyennes distances d'un nombre de points donnés à l'un de ces points, est égal à la somme de la somme des carrés des distances de ce centre aux points restans et du double de leurs rectangles deux à deux par les cosinus de leurs inclinaisons.

§ 11.

Dans l'équation du § 9 soit substituée au rectangle $2AZ\times ZA'\cos.AZA'$, sa valeur $ZA^2+ZA'^2-AA'^2$; soit faite la même substitution pour chacun des autres rectangles, et soient faites les réductions convenables ; on trouve finalement :

$$m\times ZA^2 + m'\times ZA'^2 + m''\times ZA''^2 + m'''\times ZA'''^2 + \ldots + m^x\times ZA^{x2}$$
$$= \frac{mm'}{\int.m^x} AA'^2 + \frac{mm''}{\int.m^x} AA''^2 + \frac{mm'''}{\int.m^x} AA'''^2 + \ldots\ldots + \frac{mm^x}{\int.m^x} AA^{x2}$$
$$+ \frac{m'm''}{\int.m^x} A'A''^2 + \frac{m'm'''}{\int.m^x} A'A'''^2 + \ldots\ldots + \frac{m'm^x}{\int.m^x} A'A^{x2}$$
$$+ \frac{m''m'''}{\int.m^x} A''A'''^2 + \ldots\ldots + \frac{m''m^x}{\int.m^x} A''A^{x2}$$
$$+ \ldots\ldots + \frac{m'''m^x}{\int.m^x} A'''A^{x2}$$
$$+ \frac{m^{x-1}m^x}{\int.m^x} A^{x-1}A^{x2}$$

Savoir : la somme des espaces qui sont aux carrés des distances du centre des moyennes distances à chacun des points dans les rapports dont les exposans sont les coefficiens donnés, est égale à la somme des espaces qui sont aux carrés des distances des points donnés deux à deux dans des rapports dont les exposans sont les termes quatrièmes proportionnels à la somme des coef-

Digitized by Google

ficiens donnés, et aux deux coefficiens correspondans aux points dont on prend la distance (1).

Symboliquement. On a l'équation, $f.\,m^N \times A^N Z^2 = \frac{f.\,m^{N-1}m^N}{f.\,m^N} \times A^{N-1}A^{\overline{N}^2}$

En particulier que tous les coefficiens soient égaux entr'eux ; et soit n le nombre des points, on a l'équation

$$f.\,A^N Z^2 = \frac{1}{n} f.\,A^{N-1}A^{\overline{N}^2} \; ; \; n \times f.\,A^N Z^2 = f.\,A^{N-1}A^{\overline{N}^2}.$$

Exemple : Dans un polygone régulier, le carré du produit du rayon par le nombre des sommets est égal à la somme des carrés de tous les côtés et de toutes les diagonales de ce polygone.

§ 12.

Je passe à la détermination de la position du centre des moyennes distances relativement à l'un des points donnés de position, et relativement à l'une des droites qui joignent ces points deux à deux.

Soit prise l'une de ces droites, telle que AA' ; soient abaissées sur elle des perpendiculaires depuis les points restans et depuis le centre des moyennes distances ; et soit ZY la perpendiculaire abaissée sur cette droite depuis le centre Z des moyennes distances, on a les deux équations suivantes :

$$ZY\,f.\,m^N = m''AA''\sin.A'AA'' + m'''AA'''\sin.A'AA''' + \ldots\ldots + m^N AA^N \sin.A'AA^N$$

$$AY\,f.\,m^N = m'AA' + m''AA''\cos.A'AA'' + m'''AA'''\cos.A'AA''' + \ldots + m^N AA^N \cos.A'AA^N$$

$$\text{De là : } \frac{ZY}{AY} = \text{tang.}ZAA' = \frac{m''AA''\sin.A'AA'' + m'''AA'''\sin.A'AA''' + \ldots + m^N AA^N \sin.A'AA^N}{m'AA' + m''AA''\cos.A'AA'' + m'''AA'''\cos.A'AA''' + \ldots + m^N AA^N \cos.A'AA^N}$$

$$\begin{aligned}
\text{et } AZ^2 f.^2\, m^N = {} & [m'AA' + m''AA''\cos.A'AA'' + m'''AA'''\cos.A'AA''' + \ldots + m^N AA^N \cos.A'AA^N]^2 \\
& + [m''AA''\sin.A'AA'' + m'''AA'''\sin.A'AA''' + \ldots + m^N AA^N \sin.A'AA^N]^2 \\
= {} & m'm'AA'^2 + m''m''AA''^2 + m'''m'''AA'''^2 + \ldots + m^N m^N AA^{N2} \\
& + 2m'm''AA' \times AA''\cos.A'AA'' + 2m'm'''AA' \times AA'''\cos.A'AA''' + \ldots + 2m'm^N AA' \times AA^N \cos.A'AA^N \\
& + 2m''m'''AA'' \times AA'''\cos.A''AA''' + \ldots + 2m''m^N AA'' \times AA^N \cos.A''AA^N \\
& + 2m'''m^N AA''' \times AA^N \cos.A'''AA^N \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + 2m^{N-1} m^N AA^{N-1} \times AA^N \cos.A^{N-1}AA^N.
\end{aligned}$$

---

(1) Cette proposition remarquable a été publiée en premier lieu par le célèbre La Grange, dans les Mémoires de Berlin.

Appelé par des recherches sur la Polygonométrie et sur la Polyhédrométrie à m'occuper du même objet, je l'avois aussi trouvée de mon côté, et j'en avois envoyé le développement à l'Académie de Pétersbourg, avant que je connusse le travail de ce profond mathématicien.

soient

Soient substituées à ces derniers rectangles leurs valeurs tirées des équations $2AA' \times AA'' \cos. A'AA'' = AA'^2 + AA''^2 - A'A''^2$; on a l'équation

$$AZ^2 f.^2 m^N = [m' \times AA'^2 + m'' \times AA''^2 + m''' \times AA'''^2 \ldots + m^N \times AA^{N2}] [f. m^N - m]$$
$$+ 2m'm'' \times AA' \times AA'' \cos. A'AA'' + 2m'm''' \times AA' \times AA''' \cos. A'AA''' + \ldots 2m'm^N AA' \times AA^N \cos. A'AA^N$$
$$+ 2m''m''' \times AA'' \times AA''' \cos. A''AA''' + \ldots 2m''m^N \times AA'' \times AA^N \cos. A''AA^N$$
$$+ 2m'''m^N \times AA''' \times AA^N \cos. A'''AA^N$$

$$+ 2m^{N-1} m^N \times AA^{N-1} \times AA^N \cos. A^{N-1}AA^N$$

On a donc la position du centre Z, par l'angle ZAA' que la droite menée de ce centre à l'un des points A fait avec la droite menée de ce point à l'un des poiuts restans, et par sa distance à ce même point.

§ 13.

Ce qui a été dit sur le centre des moyennes distances de points donnés de position pour des coefficiens donnés de grandeur, s'applique (avec les changemens de signes convenables) à l'*excentre* des moyennes distances.

Premier exemple : Soient A et A' deux points donnés de position, et soient m et m' deux coefficiens correspondans donnés de grandeur et inégaux entr'eux, dont *m* est le plus petit. Sur AA' prolongée de A en A' soit déterminé le point Z de manière que $AZ \times m = A'Z \times m'$ ou $AZ : A'Z = m' : m$; puis sur une droite quelconque, relativement à laquelle les points A, A', Z, soient situés d'un même côté, soient abaissées des perpendiculaires AB, A'B', ZY, on aura (§ 2.), $AB \times m - A'B' \times m' = ZY (m' - m)$. Fig. 6.

Lorsque $m = m'$ le point Z ne peut pas être déterminé, il est dit infiniment éloigné : alors, $AB \times m - A'B' \times m' = m (AB - A'B')$; et partant cette différence peut être quelconque.

Second exemple : Soient A, A', A'', trois points donnés de position ; et soient m, m', m'', trois coefficiens correspondans donnés de grandeur. On peut déterminer le point Z de manière qu'abaissant depuis tous ces points sur une droite quelconque des perpendiculaires (dans une même direction, relativement à cette droite), lesquelles soient AB, A'B', A''B'', ZY, on ait l'équation : $m \times AB + m' \times A'B' - m'' \times A''B'' = ZY (m + m' - m'')$.

En effet, soit déterminé le centre *z*, des moyennes distances des points A et A', pour les coefficiens correspondans m et m' ; et soit déterminé l'excentre Z des moyennes distances des points *z* et A'' pour les coefficiens m+m' et m''. Ce

point Z est l'excentre des moyennes distances des points A, A', A'', pour les coefficiens m, m' et m''.

Pour que le point Z puisse être déterminé, on doit avoir $m+m'$ non égal à m''. Lorsque $m+m' > m''$; le point Z est sur A''z, prolongée de A'' au-delà de z; et on a l'équation: $m \times AB + m' \times A'B' - m'' \times A''B'' = ZY(m+m'-m'')$.

Lorsque $m+m' < m''$; le point Z est situé sur A''z prolongée de z au-delà de A'' et on a l'équation:

$$m'' \times A''B'' - (m \times AB + m' \times A'B') = ZY\,(m''-m-m').$$

Lorsque $m+m'=m''$; le point Z ne peut pas être déterminé, il est dit infiniment éloigné, et la différence $m \times AB + m' \times A'B' - m'' \times A''B''$ peut être quelconque.

Lorsque le point z coïncide avec le point A'', le point Z convient aussi avec chacun d'eux; et on a $m \times AB + m' \times A'B' - m'' \times A''B'' = (m+m'-m'')\,A''B''$. Que les points A et A' soient situés d'un des côtés de la droite sur laquelle on abaisse les perpendiculaires, et que le point A'' soit situé de l'autre côté de la même droite; on a l'équation : $m \times AB + m' \times A'B' + m'' \times A''B'' = (m+m'-m'')\,ZY$.

Troisième exemple. Soient A, A', A'', A''', quatre points donnés de position, et soient m, m', m'', m''', des coefficiens donnés; soit Z un cinquième point. De ces points soient abaissées sur une même droite, dans une même direction relativement à elle, des perpendiculaires AB, A'B', A''B'', A'''B''', ZY.

1.° On peut déterminer le point Z de manière qu'on ait l'équation:

$$m \times AB + m' \times A'B' + m'' \times A''B'' - m''' \times A'''B''' = ZY\,(m+m'+m''-m''').$$

Soit z le centre des moyennes distances des points A, A', A'', pour les coefficiens m, m', m''; et soit Z l'excentre des moyennes distances des points z et A''' pour les coefficiens $m+m'+m''$ et m'''. Le point Z est le point cherché.

2.° On peut déterminer le point Z de manière qu'on ait l'équation $m \times AB + m' \times A'B' - m'' \times A''B'' - m''' \times A'''B''' = ZY\,(m+m'-m''-m''')$.

En effet, soit z le centre des moyennes distances des points A et A' pour les coefficiens m et m', et soit z' le centre des moyennes distances des points A'' et A''' pour les coefficiens m'' et m'''; enfin soit Z l'excentre des moyennes distances des points z et z' pour les coefficiens $m+m'$ et $m''+m'''$. Le point Z est le point cherché.

Pour que le point Z puisse être déterminé, on doit avoir $m+m'$ non égal à $m''+m'''$; lorsque ces deux sommes sont égales, la différence $(m+m')\,zy - (m''+m''')\,z'y' = (m+m')\,(zy-z'y')$; et lorsque les points z et z' coïncident la question est indéterminée.

Ainsi, dans un parallélogramme, les sommes des perpendiculaires abaissées sur une droite quelconque depuis les sommets opposés, sont égales entr'elles, ou la différence de ces deux sommes est zéro.

Généralement. Soient des points en nombre quelconque donnés de position, et soient des coefficiens correspondans donnés de grandeur. Soient d'autres points en nombre quelconque aussi donnés de position, et soient aussi des coefficiens correspondans donnés de grandeur. Soit cherché le centre des moyennes distances des premiers points pour les coefficiens donnés; soit aussi cherché le centre des moyennes distances des seconds points pour les coefficiens donnés; soit déterminé (s'il est possible) l'excentre des moyennes distances de ces deux centres pour les sommes des coefficiens correspondans. Il sera l'excentre du système des premiers points et du système des seconds points, pour les coefficiens donnés.

Les propositions qui ont été développées dans les §§ 8 et 11 ont leurs correspondantes pour l'excentre des moyennes distances, en changeant les signes des coefficiens des termes correspondans aux points qui appartiennent au second système.

Je passe aux applications des propriétés du centre des moyennes distances aux figures rectilignes.

§ 14.

Théorème. D'un point pris sur le plan d'un triangle soient menées des droites respectivement égales et parallèles à ses côtés en tournant toujours dans un même sens. J'affirme que ce point est le centre des moyennes distances des extrémités de ces droites.

Comme tous les systèmes de droites engendrés conformément à la supposition, ne diffèrent entr'eux que par la position, il suffit de montrer que la proposition est vraie pour le système engendré par les droites menées d'un des sommets du triangle.

Soit donc SAA′ un triangle; par un des sommets tel que S soit menée à AA′ une parallèle Sa′ égale à elle, et soit prolongée A′S de l'autre côté du point S d'une quantité Sa″ égale à SA′. J'affirme que le point S est le centre des moyennes distances des points A, a′, a″. FIG. 7.

Soient menées les droites Aa′, a′a″, a″A, et que la droite a′S rencontre Aa″ en a.

Les droites Sa et AA′ étant parallèles entr'elles, les triangles Aa″A′, aa″S sont semblables; mais A′a″ = 2Sa″, donc, Aa″ = 2aa″, et AA′ = 2Sa; mais

$AA'=Sa'$; donc $Sa'=2Sa$; donc, dans le triangle $Aa'a''$, la droite $a'a$ est menée du sommet a' au milieu du côté opposé, et elle est coupée en S en deux parties dont l'une Sa' est double de Sa : donc (§ 3), le point S est le centre des moyennes distances des points A, a', a''.

Fig. 8. *Second exemple.* Soit $SAA'A''$, un quadrilatère. Par un des sommets tel que S de ce quadrilatère, soient menées des droites Sa', Sa'', respectivement égales et parallèles aux côtés AA', $A'A''$, et soit $A''S$ prolongée en a''' du côté de S, d'une quantité $Sa'''=SA''$; j'affirme que le point S est le centre des moyennes distances des points A, a', a'', a'''.

Soit prolongée $A'S$ de l'autre côté du point S, d'une quantité $S\alpha''=SA'$.

Dans le triangle ASA', le point S est le centre des moyennes distances des points A, a', α'' ; et dans le triangle $A'SA''$, il est aussi le centre des moyennes distances des points A', a'', a''' ; donc, le point S est le centre des moyennes distances de tous les points A, A', a', a'', α'', a'''. Mais, puisque $SA'=S\alpha''$, le point S est aussi le centre des moyennes distances des points A' et α'' ; donc, le point S est aussi le centre des moyennes distances de points restans A, a', a'', a'''.

Troisième exemple. Soit $SAA'A''A'''$ un pentagone. Par S, soient menées les droites Sa', Sa'', Sa''', respectivement égales et parallèles aux côtés AA', $A'A''$, $A''A'''$; et soit $A'''S$ prolongée en a^{iv} d'une quantité $Sa^{iv}=SA'''$. J'affirme que le point S est le centre des moyennes distances des points A, a', a'', a''', a^{iv}.

Que les diagonales $A'S$ et $A''S$ soient prolongées en α'' et α''' de quantités égales à elles-mêmes.

Par le premier exemple, le point S est le centre des moyennes distances de chacun des systèmes de points, A, a', α'' ; A', a'', α''' ; A'', a''', a^{iv} ; donc, il est aussi le centre des moyennes distances de l'assemblage de tous ces points ; mais puisque $SA'=S\alpha''$, et $SA''=S\alpha'''$; le point S est aussi le centre des moyennes distances des points A', a'', α'', α''' ; donc, il est aussi le centre des moyennes distances des points restans A, a', a'', a''', a^{iv}.

On prouve de la même manière que la proposition est vraie successivement pour des polygones dont le nombre des sommets augmente successivement d'une unité : savoir le point S est le centre des moyennes distances, des sommets restans de la figure, des extrémités des droites menées, et des extrémités des prolongemens des diagonales, égaux à ces diagonales elles-mêmes ; mais il est aussi le centre des moyennes distances des extrémités des diagonales et de leurs prolongemens ; donc, il est le centre des moyennes distances des points restans.

Remarque. Tout ce qui a été dit sur les droites parallèles aux côtés d'une figure

figure rectiligne, est également vrai pour les perpendiculaires à ces côtés, et égales à ces côtés ou proportionnelles à eux; en supposant que ces perpendiculaires sont menées dans un même sens, savoir, du dedans au dehors de la figure ou réciproquement. On a donc aussi le théorème suivant. D'un point pris sur le plan d'une figure rectiligne, soient abaissées sur ses côtés, à compter depuis ce point, et en tournant constamment dans un même sens, des perpendiculaires proportionnelles à ces côtés : ce point est le centre des moyennes distances des extrémités de ces droites.

En effet ; l'angle formé par deux droites perpendiculaires à deux autres, est égal à l'angle formé par ces deux droites. Partant, les assemblages de droites égales deux à deux, dans l'un desquels ces droites sont parallèles à des droites données de position, et dans l'autre desquels elles leur sont perpendiculaires, peuvent convenir entr'eux.

§ 15.

D'après la proposition précédente, on peut appliquer aux figures rectilignes l'équation du centre des moyennes distances, contenue dans le § 6, et ses conséquences développées dans les §§ 8 et 10. On a pour un côté quelconque SA, l'équation :

$$SA+Sa'\cos.ASa'+Sa''\cos.ASa''+Sa'''\cos.ASa'''+Sa^{x-1}\cos.ASa^{x-1}+Sa^{x}\cos.ASa^{x}=0.$$

Or, les angles ASa', ASa'', ASa''' .... ASa^{x-1}, ASa^{x}, comptés en tournant dans un même sens, sont les inclinaisons à SA des côtés restans de la figure pris extérieurement à elle, ou la somme des angles extérieurs compris entre SA et chacun de ces côtés. Partant, désignant les côtés d'une figure par A, B, C, D... L, M, désignant par ab l'inclinaison de deux côtés A et B prise extérieurement à la figure, et appliquant cette symbolisation à tous les côtés pris deux à deux; on a la suite d'équations :

$$A+B\cos.ab+C\cos.ac+D\cos.ad+....+L\cos.al+M\cos.am=0.$$
$$A\cos.ab+B+C\cos.bc+D\cos.bd+....+L\cos.bl+M\cos.bm=0.$$
$$A\cos.ac+B\cos.bc+C+D\cos.cd+....+L\cos.cl+M\cos.cm=0.$$
$$A\cos.ad+B\cos.bd+C\cos.cd+D+....+L\cos.dl+M\cos.dm=0.$$

$$A\cos.al+B\cos.bl+C\cos.cl+D\cos.dl+....+L+M\cos.lm=0.$$
$$A\cos.am+B\cos.bm+C\cos.cm+D\cos.dm+....+L\cos.lm+M=0.$$

Soient multipliés les membres de ces équations par A, B, C, D... L, M, respectivement, et soient ajoutés tous les produits; on obtient la proposition suivante. La somme des carrés des côtés d'une figure rectiligne, est égale au double de la

somme de leurs rectangles deux à deux par les cosinus des supplémens des sommes des angles extérieurs compris entr'eux.

De là, substituant le double d'un des côtés à la somme de ses coefficiens; et réduisant, on obtient la proposition suivante. Le carré d'un côté d'une figure rectiligne est égal à l'excès de la somme des carrés des autres côtés sur la somme de leurs doubles rectangles deux à deux, par les cosinus des supplémens des sommes des angles extérieurs compris entr'eux.

$$\begin{aligned} AA = BB + CC + DD + \ldots + LL + MM \\ + 2\,BC\cos.bc + 2\,BD\cos.bd + \ldots + 2\,BL\cos.bl + 2\,BM\cos.bm \\ + 2\,CD\cos.cd + \ldots + 2\,CL\cos.cl + 2\,CM\cos.cm \\ + 2\,DL\cos.dl + 2\,DM\cos.dm \\ + 2\,LM\cos.lm \end{aligned}$$

Cette correspondance entre les propriétés des figures rectilignes et celles du centre des moyennes distances, peut être mise sous les yeux comme il suit:

Des extrémités d'une droite soient abaissées des perpendiculaires sur une autre droite (que j'appellerai *base*): la partie de cette droite comprise entre les pieds de ces perpendiculaires est appelée la *projection orthographique* (ou simplement la projection) de la première droite.

La droite projetée est à sa projection comme le sinus total est au cosinus de l'inclinaison de la droite à la base.

Partant, prenant pour base un des côtés d'une figure rectiligne, et projetant sur ce côté tous les côtés restans de la figure: ce côté est égal à la somme des produits des autres côtés par les cosinus de leurs inclinaisons à lui prises intérieurement à la figure; et ces inclinaisons sont les supplémens des sommes des angles extérieurs compris entre ces côtés et la base. Voyez par exemple, pour des développemens ultérieurs, mon Traité de polygonométrie.

§ 16.

Définition. Le milieu d'une droite est le centre des moyennes distances des points qui, deux à deux, en sont également éloignés; de là, le milieu d'une droite est aussi appelé le centre des moyennes distances de cette droite.

Soit un assemblage quelconque de droites: soient pris les produits de chacune de ces droites par la perpendiculaire abaissée de son milieu sur une droite quelconque prise pour axe, et soit prise la somme de ces produits. Soit convertie cette somme en un rectangle ayant pour un de ses côtés la somme de toutes ces droites; l'autre côté sera la distance à cet axe du centre des moyennes

Digitized by Google

distances de toutes ces droites; et partant, pour trouver le centre des moyennes distances d'un nombre quelconque de droites, on doit trouver le centre des moyennes distances de leurs milieux pour ces droites elles-mêmes prises comme coefficiens correspondans.

Lorsqu'on fait tourner une ligne droite autour d'un axe quelconque, la surface engendrée par cette droite est égale à un rectangle, qui a pour hauteur la droite génératrice, et qui a pour base la circonférence engendrée par son milieu; partant, elle est proportionnelle au rectangle de cette droite par la distance de son milieu à l'axe de révolution. Partant, la surface engendrée par la révolution d'un système de droites autour d'un axe relativement auquel elles sont situées d'un même côté, est égale à un rectangle dont un des côtés est la somme de ces droites, et dont l'autre côté est la circonférence décrite par le centre de leurs moyennes distances. Partant, le système des droites restant le même, la surface engendrée par sa révolution autour d'un axe, est proportionnelle à la distance à cet axe du centre des moyennes distances du système générateur.

De là, si on connoît d'ailleurs la surface engendrée par le système de ces droites; on peut déterminer le centre des moyennes distances.

Exemple. Soit un polygone régulier d'un nombre pair de côtés inscrit à un cercle, soit mené un des diamètres de ce cercle par deux sommets opposés; et soit fait tourner le demi-polygone autour de ce diamètre. Il est connu que la surface engendrée par la révolution du contour de ce demi-polygone est égale au rectangle du diamètre par la circonférence dont l'apothème du polygone est le rayon; mais cette surface est aussi égale à un rectangle dont un des côtés est le demi-contour du polygone, et dont l'autre côté est la circonférence dont le rayon est le centre des moyennes distances de ce demi-contour; partant, la distance à l'axe du centre des moyennes distances du demi-contour, est une quatrième proportionnelle à ce demi-contour, au diamètre et à l'apothème.

Or; une figure curviligne est la limite des figures rectilignes qui lui sont inscrites et circonscrites; et la surface engendrée par la révolution d'une ligne courbe est aussi la limite des surfaces engendrées par les contours de ces figures. Partant, on peut appliquer aux figures curvilignes ce qui est vrai pour les figures rectilignes, en tant qu'il est indépendant du nombre de leurs côtés (conformément à la doctrine des limites que ce n'est pas ici le lieu de développer). Partant, une ligne courbe étant proposée, si on la fait tourner autour d'un axe, la surface courbe engendrée par cette révolution dépend seulement

de la distance à cet axe d'un certain point appelé le centre des moyennes distances de cette courbe.

Exemple. Soient substituées dans l'exemple précédent les limites des quantités qui en sont susceptibles, à ces quantités elles-mêmes; on trouve que la distance du centre des moyennes distances de la circonférence d'un demi-cercle à la base est une troisième proportionnelle au quart de la circonférence et au rayon; cette distance est donc environ les $\frac{11}{14}$ du rayon.

Remarque. La proposition qui fait l'objet de ce §, est, quant aux surfaces engendrées par révolution, une partie de la règle appelée par les modernes *Règle de Guldin*, quoiqu'elle fut déjà connue des anciens.

§ 17.

Ce qui a été dit sur le centre des moyennes distances des points situés sur un même plan, et rapportés à une droite située sur ce plan, s'étend au centre des moyennes distances des points situés dans l'espace et rapportés à un plan.

Soient des points en nombre quelconque donnés de position dans l'espace; et soient des coefficiens en même nombre donnés de grandeur. Soit un plan quelconque relativement auquel les points donnés sont situés d'un même côté. De ces points soient abaissées sur ce plan des perpendiculaires, et soient pris les produits de ces perpendiculaires par les coefficiens correspondans donnés. Qu'il y ait un point tel qu'abaissant de ce point une perpendiculaire sur le même plan, le produit de cette perpendiculaire par la somme des coefficiens donnés est égal à la somme des premiers produits; ce point est appelé le centre des moyennes distances des premiers points pour ces coefficiens.

Je vais prouver que ce point existe, pour un nombre quelconque de points donnés, et pour des coefficiens aussi donnés.

Premier exemple. Soient deux points donnés de position dans l'espace. Le centre de leur moyenne distance relativement à une droite située dans le même plan qu'eux, est aussi le centre de leur moyenne distance relativement à un plan quelconque.

En effet; la droite qui joint les points donnés, les perpendiculaires abaissées de ces points sur un plan, et la droite qui joint les pieds de ces perpendiculaires, sont dans un même plan.

Second exemple. Soient trois points donnés de position; j'affirme la même identité.

En effet, soit substitué à deux des trois points donnés le centre de leur moyenne distance, et soit déterminé le centre des moyennes distances de celui-ci

celui-ci et du troisième des points donnés, pour la somme des deux premiers coefficiens et pour le troisième coefficient. On obtient le centre des moyennes distances des trois points donnés pour les coefficiens donnés, relativement à un plan quelconque.

Troisième exemple. Soient quatre points dans l'espace, donnés de position, et soient des coefficiens correspondans donnés de grandeur; soit déterminé le centre des moyennes distances de trois de ces points relativement aux coefficiens correspondans, et soit de nouveau déterminé le centre des moyennes distances de celui-ci et du quatrième des points donnés, relativement à la somme des trois premiers coefficiens et au quatrième; on aura le centre des moyennes distances des points donnés pour les coefficiens donnés relativement à un plan quelconque.

En général, qu'on ait déterminé le centre des moyennes distances d'un nombre proposé de points pour des coefficiens donnés, relativement à un plan quelconque. On déterminera le centre des moyennes distances du système composé des premiers points et d'un point de plus auquel est aussi relatif un coefficient donné; en prenant le centre des moyennes distances du centre des premiers points et du dernier point, pour la somme des premiers coefficiens et pour le coefficient répondant au dernier point.

On montre, comme dans le cas des points situés sur un même plan, que le centre des moyennes distances de points donnés de position, pour des coefficiens donnés de grandeur, est unique, quel que soit celui de ces points qu'on combine avec le centre des moyennes distances des points restans. Par exemple, soient quatre points donnés de position dans l'espace, et que les coefficiens correspondans soient égaux entr'eux; ces quatre points sont les sommets d'une pyramide triangulaire, et le centre des moyennes distances de ces sommets est sur chacune des droites menées d'un des sommets au centre des moyennes distances des trois sommets restans. On montre (à peu près comme pour trois points, §. 3) que ces quatre droites se coupent en un même point, de manière que la partie comprise entre ce point et l'un des sommets est triple de la partie comprise entre le même point et la face de la pyramide opposée à ce sommet.

Lorsqu'un polyèdre a un centre de figure, celui-ci est en même tems le centre des moyennes distances de ses sommets. Cela a lieu en particulier pour les solides réguliers (le tétraèdre non compris), pour les parallélipipèdes, pour les prismes droits dont la base a un centre de figure, etc. etc.

§ 18.

Théorème. Chaque diagonale d'un parallélipipède passe par les centres des moyennes distances des extrémités des arrêtes que forment les angles solides dont les extrémités de cette diagonale sont les sommets ; et elle est coupée à ces points en trois parties égales.

FIG. 9. Soient S et *s*, deux sommets opposés d'un parallélipipède; soient SA, SA', SA'', les arrêtes du parallélipipède adjacentes au premier sommet ; et soient sa, sa', sa'', les arrêtes adjacentes au second, et respectivement parallèles aux premières. Que les diagonales AA', Sa'', se coupent en C, et que la diagonale Ss rencontre en Z la droite A''C ; j'affirme que Z est le centre des moyennes distances des points A, A', A'', et que Ss = 3SZ.

Dans le parallélogramme A''Sa''s, la droite A''C est menée du sommet A'' au milieu C du côté opposé ; partant (§ 3), sZ = 2SZ, et A''Z = 2CZ. Or, dans le triangle AA'A'', la droite A''C est menée au milieu C du côté AA', et elle est coupée en Z de manière que A''Z = 2CZ ; donc, Z est le centre des moyennes distances des points A, A', A''. Partant, la diagonale Ss passe par le centre Z des moyennes distances des points A, A', A'', et elle est coupée à ce point en deux parties, dont l'une sZ est double de l'autre SZ.

1.re *Application.* La perpendiculaire abaissée du point s, sur un plan passant par S, est triple de la perpendiculaire abaissée du point Z sur le même plan ; mais, le triple de la perpendiculaire abaissée du point Z, est égale à la somme des perpendiculaires abaissées des points A, A', A'', sur le même plan ; partant, la perpendiculaire abaissée du point *s* sur un plan passant par S, est égale à la somme des perpendiculaires abaissées des points A, A', A'', sur le même plan.

2.me *Application.* Au plan passant par S soit substituée la droite perpendiculaire à ce plan et passant par S ; que cette perpendiculaire soit appelée SB, les perpendiculaires abaissées sur le plan depuis les points A, A', A'', sont respectivement égales aux segmens de cette droite qui en sont retranchés depuis le point S, par les perpendiculaires abaissées sur elle depuis les mêmes points ; et partant, pour une droite quelconque SB menée par S, on a l'équation :

$$SA \cos. ASB + SA' \cos. A'SB + SA'' \cos. A''SB = Ss \cos. sSB.$$

En particulier ; que la droite SB coïncide avec Ss, on a l'équation :

$$SA \cos. ASs + SA' \cos. A'Ss + SA'' \cos. A''Ss = Ss.$$

Partant ; la diagonale Ss d'un parallélipipède est exprimée dans les arrêtes SA, SA', SA'' de ce parallélipipède, et dans les angles que ces arrêtes font avec la même diagonale.

Savoir, dans tout parallélipipède, une diagonale est égale à la somme des

produits des arrêtes menées d'une de ses extrémités, par les cosinus de leurs inclinaisons à elle.

3.me *Application.* Une diagonale d'un parallélipipède peut aussi être exprimée dans ses arrêtes et dans les diagonales de ses faces.

En effet; dans les triangles ASs, A'Ss, A''Ss;

$$SA\cos.\,ASs=\frac{SA^2+Ss^2-As^2}{2Ss}=\frac{SA^2+Ss^2-Sa^2}{2Ss}$$

$$SA'\cos.\,A'Ss=\frac{SA'^2+Ss^2-A's^2}{2Ss}=\frac{SA'^2+Ss^2-Sa'^2}{2Ss}$$

$$SA''\cos.\,A''Ss=\frac{SA''^2+Ss^2-A''s^2}{2Ss}=\frac{SA''^2+Ss^2-Sa''^2}{2Ss}$$

De là; $Ss=\frac{SA^2+Ss^2-Sa}{2Ss}+\frac{SA'^2+Ss^2-Sa'^2}{2Ss}+\frac{SA''^2+Ss^2-Sa''^2}{2Ss}$

Et $Ss^2=(Sa^2+Sa'+Sa''^2)-(SA^2+SA'^2+SA''^2)$.

Savoir, dans tout parallélipipède, le carré d'une diagonale est égal à l'excès de la somme des carrés des trois diagonales des faces qui partent d'une de ses extrémités, sur la somme des carrés des arrêtes qui partent de la même extrémité.

4.me *Application.* On peut encore estimer une diagonale d'un parallélipipède dans ses arrêtes, et dans les angles qu'elles forment entr'elles.

En effet; $Sa^2=SA'^2+SA''^2-2A'S\times SA''$ cos. A'SA''.

$Sa'^2=SA^2+SA''^2-2AS\times SA''$ cos. ASA''.

$Sa''^2=SA^2+SA'^2-2AS\times SA'$ cos. ASA'.

Donc, $Sa^2+Sa'^2+Sa''^2-(SA^2+SA'^2+SA''^2)$

$=SA^2+SA'^2+SA''^2-2AS\times SA'\cos.ASA'-2AS\times SA''\cos.ASA''-2A'S\times SA''\cos.A'SA''=Ss.^2$

Savoir, dans tout parallélipipède, le carré d'une diagonale est égal à l'excès de la somme des carrés des trois arrêtes qui partent d'une de ses extrémités, sur le double de la somme de leurs produits deux à deux, par les cosinus de leurs inclinaisons entr'elles.

En particulier; que l'angle en S soit un angle solide rectangle :

$Ss^2=SA^2+SA'^2+SA''^2$. Ce qui est évident : en effet, dans ce cas,

$Ss^2=Sa''^2+sa''^2=SA^2+SA'^2+SA''^2$.

Savoir; dans tout parallélipipède rectangle, le carré d'une diagonale est égal à la somme des carrés des trois arrêtes menées d'une de ses extrémités.

Corollaire 1. Puisque Ss=3SZ; si on prolonge sS en S' de l'autre côté du sommet S, d'une quantité SS' égale à Ss, le sommet S devient le centre des moyennes distances des points A, A', A'', S'.

Corollaire 2. La somme des carrés des quatre diagonales d'un parallélipipède, est égale à la somme des carrés de ses douze arrêtes.

Digitized by Google

Remarque. Ces propositions sur les parallélipipèdes peuvent être obtenues par d'autres procédés, et en particulier par la trigonométrie sphérique ; mais, vu leur importance, j'ai cru devoir les exposer d'une manière purement élémentaire, et montrer leur liaison avec la doctrine du centre des moyennes distances.

§. 19.

On peut déterminer immédiatement le centre des moyennes distances d'un nombre quelconque de points donnés dans l'espace pour des coefficiens donnés.

Pour cela ; soient pris à volonté dans l'espace trois plans qui se coupent en un même point, et par exemple perpendiculaires entr'eux. De chacun des points donnés de position soient abaissées sur ces plans des perpendiculaires, et soient pris les produits de ces perpendiculaires par les coefficiens correspondans aux perpendiculaires à chaque plan ; soit élevée à chacun d'eux une perpendiculaire telle que son produit par la somme des coefficiens donnés soit égal à la somme des produits correspondans. Par les sommets de ces perpendiculaires soient menés des plans parallèles aux premiers : le point de rencontre de ces trois plans est le centre cherché des moyennes distances des points donnés pour les coefficiens donnés.

Par la construction : ce point jouit de la propriété du centre des moyennes distances relativement aux trois premiers plans. Il faut prouver qu'il en jouit aussi relativement à tout autre plan.

Il en jouit relativement à un plan quelconque parallèle à l'un des premiers; par un raisonnement semblable à celui du § 5, pour des points situés dans un même plan. Il suffit de prouver qu'il en jouit relativement à tout autre plan mené à volonté par le même point de section.

Aux trois plans menés originairement à volonté, et à un nouveau plan mené par leur point de rencontre, on peut substituer des droites menées par le même point, et respectivement perpendiculaires à ces plans, en substituant aux perpendiculaires à ces plans les segmens retranchés de ces droites, à compter depuis leur point de section, par les perpendiculaires abaissées sur elles.

Soient donc $A, A', A'', A''' \ldots A^{x-1}, A^x$, des points donnés de position dans l'espace ; et soient $m, m', m'', m''' \ldots m^{x-1}, m^x$, des coefficiens correspondans donnés de grandeur. Soient SV, SX, SY, trois droites menées à volonté dans l'espace, par un même point S, et par exemple perpendiculaires entr'elles. Soient

$AV, A'V', A''V'' \ldots A^x V^x$
$AX, A'X', A''X'' \ldots A^x X^x$
$AY, A'Y', A''Y'' \ldots A^x Y^x$;

des

des perpendiculaires à ces droites. Soit Z le centre des moyennes distances des points A, A′, A″ .... A^n, pour les coefficiens m, m′, m″.... m^n; et soient Zv, Zx, Zy, des perpendiculaires à ces droites abaissées depuis le point Z. Soit une autre droite SQ, menée par S, sur laquelle soient aussi les perpendiculaires AQ, A′Q′, A″Q″ .... $A^n Q^n$, et Zq.

On a (§ 18, 2.e App.) SQ = SV cos. QSV + SX cos. QSX + SY cos. QSY.

De là; $f. m^n \times SQ^n = \cos. QSV\, f. m^n \times SV^n + \cos. QSX\, f. m^n \times SX^n + \cos. QSY\, f. m^n \times SY^n$.

$= f. m^n (Sv \cos. QSV + Sx \cos. QSX + Sy \cos. QSY)$

$= f. m^n \times Sq$ (§ 18).

Partant; la proposition étant vraie pour les trois axes SV, SX, SY, elle est vraie pour toute droite menée par S; et partant aussi pour un plan quelconque mené par S, et partant aussi pour un plan quelconque.

§ 20.

En particulier; que le centre des moyennes distances des points A, A′, A″, A‴ ... A^n, coïncide avec l'origine S; et par S soit une droite quelconque SX sur laquelle on abaisse des perpendiculaires depuis tous les points. On a l'équation,

$$m \times SA \cos. ASX + m' \times SA' \cos. A'SX + m''SA'' \cos. A''SX + \ldots + m^n \times SA^n \cos. A^nSX = 0.$$

Cette équation, pour des points situés dans l'espace, est exactement la même que celle qui est relative à des points situés sur un même plan (§ 8); on peut en tirer les mêmes conséquences par des procédés absolument semblables à ceux qui ont été employés dans les §§ 9 et 11. En particulier, on obtient pour les points situés dans un même plan, l'équation suivante :

$$f. m^n \times SA^{n-2} = f. \frac{m^{n-1} m^n \times A^{n-1} A^n}{f. m^n}.$$

§ 21.

Tout ce qui a été dit dans le § 13 sur l'excentre des moyennes distances des points situés sur un même plan, s'applique aux points situés dans l'espace, et il seroit inutile de le répéter.

Je passe au développement de la liaison qui a lieu entre les propriétés du centre des moyennes distances, et celles des solides terminés par des figures planes, et appelés polyhèdres.

§ 22.

Soit un polyhèdre quelconque. D'un point dans l'espace soient menées des

perpendiculaires aux faces de ce polyhèdre, toutes dirigées du dedans au dehors du polyhèdre, ou au contraire. Depuis ce point, soient prises sur ces perpendiculaires des longueurs proportionnelles aux faces correspondantes du polyhèdre. J'affirme que ce point est le centre des moyennes distances des extrémités de ces droites.

Je démontrerai d'abord cette proposition sur les pyramides, et je l'étendrai ensuite aux polyhèdres quelconques.

Comme tous les systèmes de points engendrés de la manière conforme à l'énoncé peuvent convenir entr'eux, on peut prendre le sommet de la pyramide pour le point depuis lequel les perpendiculaires sont menées.

Fig. 10. (1) Soit donc ABCD.... LMN la base d'une pyramide dont le sommet est S, soient menées aux faces de la pyramide ASB, BSC, CSD.... LSM, MSN, NSA, des perpendiculaires SA', SB', SC'.... SL', SM', SN', respectivement proportionnelles à ces faces, toutes du dedans au dehors du solide, ou réciproquement. Soit aussi SP' perpendiculaire à la base, et proportionnelle à elle, de manière que le point P' soit situé du côté du plan perpendiculaire à SP' et mené par S, opposé à celui où sont situés les points A', B', C', D'.... L', M', N'; j'affirme que le point S est le centre des moyennes distances des points A', B', C', D'.... L', M', N', P'.

Soit SP la hauteur de la pyramide.

Soient Sa, Sb, Sc.... Sl, Sm, Sn, les hauteurs des faces. Soient menées Pa, Pb, Pc.... Pl, Pm, Pn.

Par S soit fait passer un plan parallèle à la base; et sur ce plan soient abaissées les perpendiculaires A'a', B'b', C'c'... L'l', M'm', N'u'; et soient menées les droites Sa', Sb', Sc'.... Sl', Sm', Sn'.

Les triangles SaP, SbP, ScP.... SlP, SmP, SnP,

. . . . . SA'a', SB'b', SC'c'.... SL'l', SM'm', SN'n'.

sont semblables deux à deux; et partant, les expressions des droites

Sa', Sb', Sc'..... Sl', Sm', Sn',

sont respectivement $SP\times\frac{SA'}{Sa}$, $SP\times\frac{SB'}{Sb}$, $SP\times\frac{Sc'}{Sc}$... $SP\times\frac{SL'}{Sl}$, $SP\times\frac{SM'}{Sm}$, $SP\times\frac{SN'}{Sn}$.

(1) Pour éviter la confusion, j'ai réduit dans la figure les lignes mentionnées dans le développement, en représentant par l'une d'elles seulement toutes celles qui jouent le même rôle dans la proposition.

Or, les droites SA', SB', SC'.... SL', SM', SN', sont respectivement proportionnelles aux rectangles

Sa×AB, Sb×BC, Sc×CD.... Sl×LM, Sm×MN, Sn×NA; donc les droites Sa', Sb', Sc'.... Sl', Sm', Sn', sont respectivement proportionnelles aux côtés de la base

AB, BC, CD.... LM, MN, NA. Mais ces droites sont parallèles aux droites

Pa, Pb, Pc.... Pl, Pm, Pn, perpendiculaires à ces côtés; partant (§ 14), le point S est le centre des moyennes distances des points

a', b', c'.....l', m', n'.

Puisque les points A', B', C'.... L', M', N', sont sur les perpendiculaires au plan mené par S parallèle à la base, et élevées depuis les points a', b', c'...l', m', n'; le centre des moyennes distances des points

A', B', C'.... L', M', N', est sur la perpendiculaire menée par S au plan parallèle à la base, et partant, sur la perpendiculaire SP au plan de la base.

En vertu des mêmes triangles semblables, les expressions des droites A'a', B'b', C'c'..... L'l', M'm', N'n', sont respectivement $Pa\times\frac{SA'}{Sa}$, $Pb\times\frac{SB'}{Sb}$, $Pc\times\frac{SC'}{Sc}$....$Pl\times\frac{SL'}{Sl}$, $Pm\times\frac{SM'}{Sm}$, $Pn\times\frac{SN'}{Sn}$; et partant elles sont proportionnelles aux rectangles

Pa×AB, Pb×BC, Pc×CD.... Pl×LM, Pm×MN, Pn×NA, ou aux triangles, APB, BPC, CPD, ... LPM, MPN, NPA; donc, leur somme est proportionnelle à la base ABC... LMN. Mais, la droite SP' est proportionnelle de la même manière à la base; donc, la droite SP' est égale à la somme des droites

A'a', B'b', C'c', ... L'l', M'm', N'n'. Donc, le centre des moyennes distances de tous les points A', B', C'.... L', M', N', P', est sur le plan passant par S perpendiculaire à SP.

Mais ce centre est aussi sur la droite qui joint le point P' avec le centre des moyennes distances des points

A', B', C'.... L', M', N'; donc, il est sur la droite SP' elle-même; donc le point S est le centre des moyennes distances de tous les points

A', B', C'.... L', M', N', P'.

Je passe aux polyhèdres quelconques.

Soit pris un point S dans l'intérieur d'un polyhèdre; soit décomposé ce polyhèdre en pyramides ayant ce point pour sommet commun, et ayant pour bases les faces du polyhèdre. De ce point soient menées des perpendiculaires

aux faces latérales de chaque pyramide, en les dirigeant pour chaque pyramide dans un même sens relativement à l'espace pyramidal, par exemple, toutes du dedans au dehors de cet espace; soient aussi prolongées dans la même direction depuis le point S, les perpendiculaires aux bases des pyramides ou aux faces du polyhèdre. Soient prises toutes ces perpendiculaires proportionnelles de la même manière aux faces correspondantes; en sorte que toutes ces perpendiculaires soient entr'elles comme ces faces.

Dans chaque pyramide le point S est le centre des moyennes distances des extrémités des perpendiculaires à ses faces latérales et à sa base; donc aussi, il est le centre des moyennes distances des extrémités de toutes les perpendiculaires, tant aux faces du polyhèdre qu'aux faces latérales de toutes les pyramides. Mais, les faces latérales des pyramides sont adossées deux à deux; et les perpendiculaires à ces faces sont deux à deux égales et opposées; donc le point S est aussi le centre des moyennes distances des extrémités des perpendiculaires aux faces latérales des pyramides. Donc, le point S est aussi le centre des moyennes distances des points restans, ou le point S est le centre des moyennes distances des extrémités des perpendiculaires aux faces du polyhèdre et proportionnelles à ces faces.

Je vais terminer cette dissertation par le développement de la partie de la règle de Guldin, qui est relative aux solides engendrés par la révolution des figures planes.

§ 25.

Lemme. Soit un triangle des sommets duquel on abaisse des perpendiculaires sur un axe situé hors de ce triangle. Soient pris les produits de chacune de ces perpendiculaires par la distance des deux autres. J'affirme que le double de la surface du triangle est égal à la différence de la somme des deux rectangles qui répondent aux perpendiculaires extrêmes, et du troisième.

FIG. 11. Soit AA'A'' un triangle, des sommets duquel A, A', A'', on abaisse des perpendiculaires AP, A'P', A''P'', sur une droite située hors du triangle. J'affirme que $2AA'A'' = \frac{AP \times P'P'' + A''P'' \times PP' - A'P' \times PP''}{A'P' \times PP'' - AP \times P'P'' - A''P'' \times PP'}$

Suivant

Suivant que le point A′ est entre l'axe et AA″, ou au-delà de AA″ relativement à cet axe.

1.° Soit A′ entre l'axe et AA″ :

$$AA'A''=APP''A''-APP'A'-A'P'P''A''$$

$$2AA'A''=(AP+A''P'')PP''-(AP+A'P')PP'-(A'P'+A''P'')P'P''$$
$$=AP\times P'P''+A''P''\times PP'-A'P'\times PP''.$$

2.° Soit A′ au-delà de AA″ relativement à l'axe :

$$AA'A''=APP'A'+A'P'P''A''-APP''A''$$

$$2AA'A''=(AP+A'P')PP'+(A'P'+A''P'')P'P''-(AP+A''P'')PP''$$
$$=A'P'\times PP''-AP\times P'P''-A''P''\times PP'.$$

§ 24.

Soit fait tourner le triangle AA′A″ autour de l'axe PP′P″, on demande l'expression de la capacité du solide engendré par cette révolution.

Soit π la circonférence du cercle dont le rayon est l'unité. Soit désigné par sol. AA′A″ le solide engendré par la révolution du triangle AA′A″ ; et soit appliquée la même symbolisation à tout autre espace engendré par révolution.

1.° Soit A′ entre l'axe et AA″.

Sol. AA′A″ = sol. APP″A″ — sol. APP′A′ — sol. A′P′P″A″. De là :

$$6\,\text{sol. }AA'A''=\pi\times PP''(AP^2+AP\times A''P''+A''P''^2)$$
$$-\pi\times PP'(AP^2+AP\times A'P'+A'P'^2)$$
$$-\pi\times P'P''(A'P'^2+A'P'\times A''P''+A''P''^2).$$

$$=\pi\times PP'(AP+A'P'+A''P'')(A''P''-A'P')$$
$$+\pi\times P'P''(AP+A'P'+A''P'')(AP-A'P')$$

$$=\pi(AP+A'P'+A''P'')(AP\times P'P''+A''P''\times PP'-A'P'\times PP'').$$

Soit Z le centre des moyennes distances des points A, A′, A″ ; et soit ZQ perpendiculaire à l'axe de révolution :

$$6\,\text{sol. }AA'A''=3\pi\times ZQ\times 2AA'A''\text{ ; et sol. }AA'A''=\pi\times ZQ\times AA'A''.$$

2.° Soit A′ au-delà de AA″ relativement à l'axe :

on trouve de la même manière la même expression du sol. AA′A″.

Savoir ; le solide engendré par la révolution d'un triangle tournant autour d'un axe extérieur à ce triangle, est égal à un prisme ayant pour base le triangle générateur, et ayant pour hauteur la circonférence décrite par le centre de ses moyennes distances.

Corollaire. Les solides engendrés par la révolution d'un même triangle

tournant autour de différens axes, sont entr'eux comme les distances à ces axes du centre des moyennes distances des sommets de ce triangle.

1.re *Application.* Le solide engendré par la révolution d'un parallélogramme tournant autour d'un axe extérieur à ce parallélogramme, est égal à un prisme ayant pour base ce parallélogramme, et pour hauteur la circonférence décrite par le centre des moyennes distances de ses sommets, qui est le point de section de ses diagonales.

En effet; soit menée une des diagonales de ce parallélogramme.

Les solides engendrés par les triangles dans lesquels ce parallélogramme est divisé sont respectivement égaux aux prismes, ayant ces triangles pour bases, et ayant pour hauteurs les circonférences décrites par les centres des moyennes distances de leurs sommets. La somme de ces solides est égale à un prisme ayant un de ces triangles pour base, et pour hauteur la somme de ces deux circonférences; ou le double de la circonférence décrite par le centre des moyennes distances des sommets du parallélogramme. Donc, ce solide est égal à un prisme, ayant pour base le parallélogramme, et ayant pour hauteur la circonférence décrite par le centre des moyennes distances des sommets du parallélogramme.

2.e *Application.* Soit une figure ayant un centre de figure. Le solide engendré par la révolution de cette figure tournant autour d'un axe extérieur à elle, est égal à un solide qui a pour base la figure génératrice, et qui a pour hauteur la circonférence décrite par ce centre. Cela a lieu en particulier pour les figures régulières d'un nombre pair de côtés; et il en est de même pour les figures régulières impaires.

§ 25.

En général : Soit $AA'A''\ldots A^{n-1}A^n$ un polygone qui tourne autour d'un axe extérieur à lui. Soit décomposé ce polygone en triangles; par exemple, par des diagonales menées d'un des sommets A, lesquelles sont AA'', $AA'''\ldots AA^{n-1}$. Soient Z', Z'', $Z'''\ldots Z^{n-2}$, Z^{n-1}, les centres des moyennes distances des sommets des triangles $AA'A''$, $AA''A'''$, $AA'''A^{iv}\ldots AA^{n-2}A^{n-1}$, $AA^{n-1}A^n$. Soient $Z'P'$, $Z''P''$, $Z'''P'''\ldots Z^{n-2}P^{n-2}$, $Z^{n-1}P^{n-1}$, les perpendiculaires à l'axe abaissées depuis les centres Z', Z'', $Z'''\ldots Z^{n-2}$, Z^{n-1}. Soit aussi Z le centre des moyennes distances des points Z', Z'', $Z'''\ldots Z^{n-2}$, Z^{n-1}, pour les coefficiens correspondans $AA'A''$, $AA''A'''$, $AA'''A^{iv}\ldots AA^{n-2}A^{n-1}$, $AA^{n-1}A^n$; et soit ZP la perpendiculaire à l'axe menée de ce centre Z.

Sol. $AA'A''A'''\ldots A^{n-1}A^n = \pi\,(AA'A''\times Z'P'+AA''A'''\times Z''P''+\ldots AA^{n-1}A^n\times Z^{n-1}P^{n-1})$
$= \pi\times AA'A''A'''\ldots A^{n-1}A^n\times ZP.$

Partant; le polygone $AA'A''A''' \ldots A^{x-1}A^x$ étant proposé, on peut déterminer le point Z, tel, que le solide engendré par la révolution de ce polygone soit proportionnel à la distance de ce point à l'axe de révolution; en sorte que ce solide est égal à un prisme, ayant pour base la figure génératrice, et ayant pour hauteur la circonférence décrite par ce point.

Je vais déterminer d'une manière plus précise la position de ce point.

§ 26.

D'un des sommets d'un triangle soit menée une droite au milieu du côté opposé; et soient menées des droites parallèles à ce côté, et terminées aux côtés restans du triangle. Les centres des moyennes distances de chacune de ces droites sont sur la première droite. Soient inscrits et circonscrits à ce triangle des parallélogrammes ayant ces parallèles pour bases, et ayant leurs autres côtés parallèles à la première droite. Les centres de ces parallélogrammes sont sur la première droite, et chacun de ces centres est appelé le centre des moyennes distances du parallélogramme correspondant.

Soit pris le produit de chacun de ces parallélogrammes par la perpendiculaire abaissée de son centre sur un axe. Soit prise chacune des sommes de ces produits, dont l'une est relative aux parallélogrammes inscrits, et dont l'autre est relative aux parallélogrammes circonscrits. Soit divisée chacune de ces sommes par les sommes des parallélogrammes correspondans; on obtient pour quotiens, les distances à l'axe des centres des moyennes distances des centres particuliers de ces parallélogrammes pour des coefficiens exprimés par ces parallélogrammes eux-mêmes; et partant, les distances à l'axe des centres des moyennes distances des sommes de ces parallélogrammes. Soit passé des sommes des parallélogrammes au triangle qui en est la limite, on obtient la distance à l'axe du centre des moyennes distances du triangle lui-même. Ce centre est sur chacune des droites menées des sommets du triangle aux milieux des côtés opposés; partant, il est à leur point de section, et il coïncide avec le centre des moyennes distances des sommets du triangle.

Soit une figure rectiligne quelconque. Que cette figure soit décomposée en triangles ayant, par exemple, pour sommet commun un des sommets de la figure. Soient pris les centres particuliers des moyennes distances de chacun de ces triangles; soit pris ensuite le centre des moyennes distances de ces centres particuliers pour des coefficiens proportionnés à ces triangles eux-mêmes. Le point obtenu sera le centre des moyennes distances de

Digitized by Google

l'assemblage de ces triangles ; et partant il est le centre des moyennes distances de la figure.

On a donc la propnsition suivante : le solide engendré par la révolution d'une figure rectiligne tournant autour d'un axe, est égal à un prisme, dont la base est la figure génératrice, et dont la hauteur est la circonférence décrite par son centre des moyennes distances.

Soit appliqué aux figures curvilignes considérées comme limites des figures rectilignes, ce qui est vrai pour les figures rectilignes quelconques ; on obtient la proposition générale suivante : dans toute figure plane il y a un point, appelé son centre des moyennes distances, tel, que faisant tourner cette figure autour d'un axe quelconque, le solide engendré par cette révolution est égal à un prisme ayant cette figure pour base, et ayant pour hauteur la circonférence décrite par le centre des moyennes distances de la figure.

Soit une figure plane quelconque, projetée orthographiquement sur un plan ; le tronc prismatique ayant pour base cette projection, et pour base supérieure la figure elle-même, est égal à un prisme, ayant pour base la projection de la figure, et ayant pour hauteur la perpendiculaire abaissée de son centre des moyennes distances sur le plan de la projection. En effet ; il est connu que cette proposition est vraie pour les triangles ; de là elle est vraie pour toutes les figures rectilignes, et par la doctrine générale des limites elle est vraie pour les figures quelconques.

§ 27.

Lorsqu'on connoît la grandeur d'une figure plane, et qu'on connoît aussi la grandeur du solide engendré par la révolution de cette figure tournant autour d'un axe, on détermine la distance à cet axe du centre des moyennes distances de cette figure. Pour cela, soit divisé le solide connu par la grandeur connue de la figure ; le quotient est la circonférence décrite par le centre des moyennes distances ; et partant, la circonférence dont le rayon est la distance à l'axe, du centre des moyennes distances.

1.er *Exemple.* Soit un trapèze dont les côtés parallèles sont perpendiculaires à un des côtés pris pour hauteur ; soit fait tourner ce trapèze autour de la hauteur. Soit h la hauteur ; soient b et b' les deux côtés parallèles. La surface de ce trapèze est $h \times \frac{b+b'}{2}$; la capacité du tronc de cône engendré par la révolution de ce trapèze, est $\pi h \times \frac{bb+bb'+b'b'}{6}$; la circonférence décrite par

par le centre des moyennes distances du trapèze est $\pi \times \frac{bb+bb'+b'b'}{3(b+b')}$; la distance à l'axe, du centre des moyennes distances est $\frac{bb+bb'+b'b'}{3(b+b')} = \frac{b+b'}{3} - \frac{bb'}{3(b+b')}$

2.e *Exemple.* Soit un demi-cercle dont le rayon est r, tournant autour de son diamètre. La surface de ce demi-cercle est $\frac{1}{2}\pi rr$.

L'expression de la capacité de la sphère engendrée par la révolution de ce demi-cercle est $\frac{2}{3}\pi r^3$.

De là, l'expression de la circonférence engendrée par la révolution du centre des moyennes distances du demi-cercle est, $\frac{2}{3}\pi r^3 : \frac{1}{2}\pi rr = \frac{4}{3}r$.

Partant, la distance du centre des moyennes distances d'un demi-cercle à sa base, est $\frac{4}{3}r \times \frac{1}{\pi}$.

Soit pris $\pi = \frac{22}{7}$ (conformément au rapport approché d'Archimède); on obtient pour cette distance à peu près $\frac{14}{33}r$. La fraction $\frac{14}{33}$ tient un milieu entre les fractions $\frac{2}{5}$ et $\frac{3}{7}$.

Digitized by Google

Digitized by Google

ÉLÉMENS
D'ANALYSE GÉOMÉTRIQUE
ET
D'ANALYSE ALGÉBRIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

Lieux à la ligne droite et à la circonférence du Cercle, traités géométriquement.

PARTIE PREMIÈRE.

Lieux traités par APOLLONIUS, *suivant* SIMSON.

§ 26.

Définition. LORSQUE chacun des points d'une ligne jouit d'une certaine propriété, et qu'aucun point hors de cette ligne ne jouit de la même propriété; cette ligne est appelée le *lieu* des points qui jouissent de cette propriété.

Je vais éclaircir cette définition par des exemples simples et connus par les premiers élémens.

Exemples. 1.° Une ligne droite est le lieu des points dont la distance à une droite donnée de position est toujours la même. Plus généralement : une ligne droite est le lieu des points de chacun desquels menant une droite sous un angle donné à une droite donnée de position, cette droite est donnée de grandeur.

2.° Comme la surface d'un triangle, dont la base est donnée de grandeur, est proportionnelle à sa hauteur; le lieu des sommets des triangles donnés de grandeur, dont la base est donnée de grandeur et de position, est une droite donnée de position.

3.° La perpendiculaire élevée du milieu d'une droite terminée, a chacun de ses points également éloigné des extrémités de cette droite, et aucun point hors de cette ligne ne jouit de la même propriété. Partant, une ligne droite est le lieu des points également éloignés de deux points donnés.

4.° La droite qui partage un angle en deux parties égales, a chacun de ses points également éloigné des jambes de cet angle, et aucun point hors de cette droite (et situé dans cet angle) ne jouit de la même propriété. Partant, une ligne droite est le lieu des points également éloignés de deux droites qui se coupent données de position. Dans ce cas; ce lieu est double, et il est composé de deux lignes droites qui divisent en deux parties égales les deux angles de suite que forment entr'elles les deux droites données de position. Lorsque les droites données de position sont parallèles entr'elles, le lieu proposé est la droite (unique) qui leur est parallèle, et qui passe par un des points également éloignés de ces deux droites.

5.° Lorsque dans un triangle on connoît un angle et le rapport des deux côtés qui sont jambes de cet angle; ce triangle est donné d'espèce, et en particulier les angles restans de ce triangle sont donnés. De là, une ligne droite est le lieu des points de chacun desquels menant une droite sous un angle donné, à une droite donnée de position, le rapport de la droite menée au segment qu'elle retranche de la droite donnée de position, à compter depuis un point donné sur elle, est toujours le même, et égal à un rapport donné.

6.° Soient deux droites parallèles entr'elles données de position. Par un même point (non situé sur l'une de ces droites) soient menées des droites qui rencontrent ces parallèles. Le rapport qui règne entre les parties de chacune de ces droites comprises entre ce point et les droites données de position, est toujours le même. De là, soient un point et une droite donnés de position; par ce point soient menées différentes droites, et que les parties de chacune de ces droites, à compter depuis ce point, soient entr'elles dans un rapport donné: si l'extrémité d'une de ces parties est à la droite donnée de position, l'extrémité de l'autre partie est aussi à une droite donnée de position parallèle à la première, ou une ligne droite est le lieu de l'extrémité de l'autre partie. Lorsque le rapport proposé est un rapport d'inégalité, le lieu est double, vu que les extrémités des parties des lignes menées peuvent être situées d'un même côté du point donné ou des deux côtés opposés.

7.° Lorsque deux systèmes de lignes sont composés de droites respectivement égales entr'elles et parallèles entr'elles deux à deux, ces deux systèmes diffèrent seulement par la place où ils sont situés. Partant, si par deux points donnés on mène des droites parallèles entr'elles deux à deux, et ayant entr'elles un rapport donné; si les extrémités des droites menées par un des points sont à une droite donnée de position, les extrémités des droites menées par l'autre point sont aussi à une droite donnée de position.

8.° La

Digitized by Google

8.° La circonférence d'un cercle est le lieu des points dont la distance à un point donné est toujours la même.

9.° La circonférence d'un cercle est le lieu des sommets des perpendiculaires à une droite donnée de position, telles, que la somme des carrés de chacune de ces perpendiculaires et du segment qu'elle retranche de la droite donnée de position, à compter depuis un point donné sur elle, est constante.

10.° Le carré de la perpendiculaire abaissée d'un point quelconque de la circonférence d'un cercle sur un diamètre, est égal au rectangle des parties de ce diamètre. Partant, si d'un point quelconque pris entre les extrémités d'une droite donnée de grandeur et de position, on lui élève une perpendiculaire moyenne géométrique entre les parties de cette droite, le sommet de cette perpendiculaire est à la circonférence d'un cercle, ou la circonférence d'un cercle est le lieu de ce sommet.

11.° Les droites menées d'un point quelconque de l'arc d'un segment de cercle aux extrémités de sa corde font entr'elles un angle constant; et les droites menées aux mêmes extrémités, d'un point qui n'est pas sur cet arc (et qui est situé du même côté de la corde), font entr'elles un angle plus grand ou plus petit que celui-là. De là, la circonférence d'un cercle est le lieu des sommets des angles donnés de grandeur, dont les jambes passent par deux points donnés.

12.° Soit un cercle donné de grandeur et de position. Par un point quelconque pris sur le plan de ce cercle (et non situé sur sa circonférence), soit menée une droite qui rencontre la circonférence; soit le rectangle des parties de cette droite comprises entre ce point et la circonférence, d'une grandeur constante. Ce point est à la circonférence d'un cercle donné concentrique au premier.

§ 27.

Les propriétés locales de la ligne droite et de la circonférence du cercle dont je viens de rappeler les énoncés, sont connues par les premiers Élémens, et en particulier par les Élémens d'EUCLIDE; ou elles en découlent immédiatement: c'est pourquoi je crois devoir me dispenser de les développer. Le traité d'APOLLONIUS intitulé *des Lieux plans*, est destiné en partie à rappeler et à développer ces propriétés, et principalement à en exposer plusieurs autres. Cet ouvrage, purement géométrique, rétabli par les modernes d'après les renseignemens transmis par PAPPUS, est l'un des monumens les plus précieux qui nous restent de la marche lumineuse et rigoureuse des anciens. Dans la première partie de ce Chapitre, je me propose de faire connoître cet ouvrage

dans notre langue dans laquelle il n'a pas encore paru, sans m'astreindre néanmoins à suivre aucune des éditions qui en ont été publiées dans d'autres langues, mais en y faisant les simplifications et les abréviations qui m'ont paru convenables, en rapprochant les unes des autres les propositions qui me paroissent susceptibles d'être réunies, et en adaptant cet ouvrage à l'état actuel des sciences, et aux progrès qu'elles ont faits par les travaux des modernes.

Robert Simson, dans son ouvrage intitulé *Apollonii pergæi loca plana, restituta*, a énoncé chaque proposition sous la forme de théorème, quoique la marche du développement soit purement analytique (en prenant cette expression dans le sens logique, et non suivant l'acception moderne qui la limite aux procédés algébriques). J'ai cru devoir énoncer chaque proposition sous la forme de problème, et en développer la recherche par l'analyse géométrique. Mon travail, ainsi présenté, me paroît plus propre à exciter la curiosité des jeunes géomètres auxquels il est principalement (si non uniquement) destiné, et à les initier à la marche analytique des anciens, trop peu connue et trop peu cultivée.

Le même auteur développe fort au long plusieurs lieux à la ligne droite, relatifs à des droites parallèles entr'elles données de position. Je crois devoir les omettre, parce qu'ils se réduisent à des problèmes déterminés, d'après la considération suivante. Soient des droites parallèles entr'elles données de position (en nombre quelconque); qu'on ait déterminé sur le plan de ces parallèles un point qui jouit relativement à elles d'une certaine propriété; par ce point soit menée une droite parallèle aux droites données de position; tout point pris sur cette parallèle jouit relativement à elles de la même propriété.

Exemples. Soient des droites parallèles entr'elles, données de position, et soit une droite qui les coupe. Sur cette droite soit déterminé un point, tel, que la somme des rectangles des distances de ce point aux points où elle rencontre les droites données de position par des droites correspondantes données de grandeur, soit donnée de grandeur. Par ce point soit menée une droite parallèle aux droites données de position; par un point quelconque de cette droite soit menée une parallèle à la première droite coupante, on obtient pour cette dernière droite menée la même propriété. Partant, la détermination du lieu relatif à la constance de cette somme, est réduite à la détermination sur une droite coupante quelconque menée sous un angle donné, du point qui jouit de la même propriété. Il en est de même pour la somme ou pour les différences des carrés de ces distances, et pour la somme ou pour les différences des espaces qui ont aux carrés de ces distances des rapports donnés.

Dans la seconde partie de ce chapitre, je réunis plusieurs propriétés locales de la ligne droite et de la circonférence du cercle, qui ne se trouvent pas dans l'ouvrage de SIMSON, et qui m'ont paru soit pour elles-mêmes, soit pour leurs applications, dignes d'être développées.

§. 28.

Problème. Soit un cercle donné de grandeur et de position, et soit un point donné de position sur le plan de ce cercle. Par ce point soient menées différentes droites. Sur chacune d'elles soient prises depuis le même point des parties qui soient entr'elles dans un rapport donné. Que l'extrémité d'une de ces parties soit à la circonférence du cercle donné; on demande le lieu de l'extrémité de l'autre partie.

Soit C le centre d'un cercle donné, soit R son rayon. Soit P un point donné sur le plan de ce cercle. Par P soit menée une droite qui rencontre en X la circonférence du cercle donné, et sur la même droite soit prise depuis le point P une droite PY, telle, que le rapport de PX à PY soit égal à un rapport donné; on demande le lieu des points Y. FIG. 12.

Analyse. Soit mené le rayon CX, et par le point Y soit conçue menée à CX une parallèle qui rencontre CP en Z.

Les triangles CPX, ZPY, sont équiangles; partant, PX : PY = CP : PZ = CX : ZY. Mais le rapport PX : PY, est supposé donné; donc les rapports CP : PZ et CX : ZY, sont l'un et l'autre donnés; mais les droites CP et CX, sont données de grandeur, donc les droites PZ et ZY, sont aussi données de grandeur; donc, le point Z est donné de position, et le point Y est à la circonférence d'un cercle dont on connoît le centre Z et le rayon; donc, le point Y est à la circonférence d'un cercle donné.

Construction. Soit menée CP. Soit changé le rapport donné dans celui de CP à une droite PZ qui sera donnée de grandeur, laquelle soit portée sur CP de P en Z. Soit aussi changé le même rapport dans celui du rayon R à une droite R′, laquelle soit prise pour rayon d'un cercle dont Z est le centre. J'affirme que la circonférence de ce cercle est le lieu cherché.

Démonstration. Par P soit menée une droite qui rencontre en X la circonférence du cercle donné, soit mené le rayon CX. Par Z soit menée à CX une parallèle qui rencontre PX en Y; j'affirme que Y est sur la circonférence du cercle dont Z est le centre et R′ le rayon.

En effet; les triangles PCX, PZY, sont équiangles; donc

PC : PZ = CX : ZY = PX : PY. Mais,

PC : PZ = CX : R′, donc ZY = R′; donc, le point Z est à la cir-

conférence du cercle dont Z est le centre, et dont R' est le rayon; et le rapport de PX à PY est égal au rapport donné de PC à PZ.

Remarque 1.re La droite PZ donnée de grandeur peut être portée sur CP de part et d'autre du point P. Partant, il y a sur la direction de CP deux positions du point Z également distantes du point P de part et d'autre de lui; et partant il y a deux cercles égaux entr'eux et semblablement placés de part et d'autre du point P, dont les circonférences jouissent chacune de la propriété proposée.

Lorsque le rapport donné est un rapport d'égalité, un des cercles cherchés convient avec le cercle donné.

Remarque 2.e Lorsque le point P est au dehors du cercle donné, ou lorsque CP est plus grande que R, on a aussi ZP plus grande que ZY; partant, le point P est aussi au dehors de chacun des deux lieux cherchés. Alors, le point P est le point de rencontre de la ligne CZ et des tangentes communes au cercle donné et à chacun des cercles cherchés.

En effet, le point de rencontre des tangentes communes à deux cercles, et de la droite qui joint leurs centres (ou de son prolongement), est tel, que ses distances aux centres des deux cercles, sont entr'elles comme leurs rayons.

En particulier, lorsque le point donné P est sur la circonférence du cercle donné, il est aussi sur la circonférence de chacun des cercles cherchés; et il est point de contact du premier de ces cercles et de chacun des autres.

Remarque 3.e Une sécante menée par P rencontre chacune des circonférences en deux points.

1.e Soit P hors de chacun de ces cercles. Les points correspondans X et Y doivent être situés, ou l'un et l'autre sur la convexité des deux cercles, ou l'un et l'autre sur leur concavité.

2.e Soit P en dedans de chacun des deux cercles; les points correspondans X et Y doivent être l'un et l'autre d'un même côté du point P.

Remarque 4.e Soient X' et Y' les points dans lesquels une sécante menée par P rencontre de nouveau les circonférences des deux cercles. Puisque le rapport de PX à PY et celui de PX' à PY', sont l'un et l'autre égaux au rapport donné ou à celui des rayons des deux cercles; aussi, le rapport de XX' à YY' est égal au même rapport; et partant, les triangles XCX', YZY' sont semblables entr'eux; les angles XCX', YZY', sont égaux entr'eux. Partant, toute droite menée par P retranche des deux cercles des segmens semblables: cela a lieu en particulier lorsque le point P est un point de contact des deux cercles.

Remarque

Digitized by Google

Remarque 5.° Tout étant posé comme dans la remarque précédente ; puisque le rapport de PX à PY est constant ; aussi le rapport de $PX \times PX'$ à $PY \times PX'$ est constant ; mais le rectangle $XP \times PX'$ est constant ; donc, le rectangle $YP \times PX'$ est aussi constant ; et de même le rectangle $Y'P \times PX$ est constant.

Lorsque le point P est au-dehors des deux cercles, les deux points correspondans X et Y′ ou X′ et Y, sont situés l'un sur la concavité et l'autre sur la convexité des deux cercles. Lorsque le point P est au-dedans des deux cercles, ces deux points correspondans sont situés des deux côtés du point P.

Remarque 6.° Le lieu proposé dans lequel le rapport de PX à PY est donné, et celui dans lequel le rectangle $XP \times PY'$ est donné de grandeur, sont liés entr'eux d'une manière si intime, que l'un d'eux ne peut pas être déterminé sans que l'autre le soit en même tems. Partant, ces lieux peuvent être regardés comme étant un seul et même lieu.

Remarque 7.° Tout ce qui a été dit sur les droites menées du point P, s'applique aux droites parallèles entr'elles deux à deux, menées de deux points P′ et P, et ayant entr'elles un rapport donné, ou formant entr'elles un rectangle donné ; d'après l'observation déjà faite (§ 26, 7.°), que les systèmes de droites égales entr'elles et parallèles entr'elles deux à deux, ne diffèrent que par la place où ils sont situés.

Remarque 8.°. Soient deux cercles non concentriques donnés de grandeur et de position. On peut déterminer en même tems la position d'un point et un rapport, de manière que menant par ce point une droite quelconque qui rencontre les circonférences des deux cercles, le rapport des parties de cette droite, comprises entre ce point et les circonférences, soit égal au rapport à assigner ; et on peut déterminer en même tems la grandeur d'un espace, de manière que le rectangle des parties comprises aussi entre ce point et les circonférences, soit égal à cet espace.

Savoir, le point à déterminer de position, est situé sur la droite qui joint les centres des deux cercles, de manière que le rapport de ces distances aux centres des deux cercles est égal au rapport des deux rayons ; et c'est aussi le rapport à déterminer. Ce point peut être situé entre les centres des deux cercles, ou sur le prolongement de la droite qui joint les centres. Si le point déterminé est au dehors des deux cercles, l'espace à déterminer, est le rectangle des tangentes communes aux deux cercles menées du même point. Si le point déterminé est en dedans de l'un et de l'autre cercle, l'espace à dé-

terminer, est le rectangle des parties de la droite qui joint les centres, comprises entre ce point et les circonférences des deux côtés opposés (1).

Calcul. Que la droite CZ qui joint les centres des deux cercles, rencontre en A et en A' la circonférence du premier cercle, et en B et B' la circonférence du second cercle.

Premier cas. Soit P entre C et Z : $CP=CZ\times\frac{R}{R+R'}$; $A'P=A'B'\times\frac{R}{R+R'}$;

$ZP=CZ\times\frac{R'}{R+R'}$; $BP=AB\times\frac{R'}{R+R'}$; $A'P\times PB=AP\times PB'=AB\times A'B'\times\frac{RR'}{(R+R')^2}$;

Second cas. Soit P sur CZ prolongée de C en Z : $CP=CZ\times\frac{R}{R-R'}$;

$A'P=A'B'\times\frac{R}{R-R'}$; $ZP=CZ\times\frac{R'}{R-R'}$; $BP=AB\times\frac{R'}{R-R'}$;

$A'P\times PB=AP\times PB'=AB\times A'B'\times\frac{RR'}{(R-R')^2}$.

Réciproquement. Que les centres C et Z soient donnés de position ; que le point P soit donné de position, et que le rayon R soit donné de grandeur.

---

(1) La proposition qui fait le sujet de cette remarque est du genre de celles auxquelles les anciens (suivant R. Simson) ont donné le nom de *porismes*.

Tandis qu'un lieu est déterminé par certaines conditions indépendantes les unes des autres; au contraire, lorsqu'un lieu est proposé, il détermine certaines relations entre les conditions qui l'auroient déterminé; en sorte que deux ou un plus grand nombre de ces conditions sont déterminées simultanément par le lieu proposé. Ainsi, le lieu des points Y qui est l'objet de la question présente étant proposé, la position du point P et le rapport de XP à PY, sont déterminés conjointement, et il en est de même pour chacun des rectangles $XP\times PY'$, $X'P\times PY$.

R. Simson, après avoir long-tems médité ce sujet sur lequel les anciens n'avoient transmis que des notions bien imparfaites, a composé un Traité des porismes (qui se trouve dans le Recueil de ses Œuvres posthumes, publiées à Glasgow en 1776, par les soins de feu mylord comte Stannope, l'un des partisans les plus zélés et les plus éclairés de l'analyse géométrique). Le Dr. Playfair a envisagé ce sujet sous un point de vue un peu différent de celui de Simson. Il pense que les anciens appeloient porismes, les propositions qui affirment la possibilité de trouver des conditions qui rendent un certain problème indéterminé ou susceptible d'un nombre illimité de solutions.

Je me propose de faire remarquer les porismes (entendus suivant le sens de Simson), correspondans aux lieux principaux qui feront le sujet de cet ouvrage. Dans le chapitre cinquième, qui présentera des applications des lieux géométriques à des problèmes déterminés, j'aurai occasion de parler du sentiment du Dr. Playfair, et de rapprocher l'une de l'autre les deux manières dont ce sujet a été envisagé par ces deux mathématiciens.

Digitized by Google

Si le rapport de PX à PY doit être constant, ce rapport est celui de PX à PZ, et le rapport des rayons R et R′ est aussi celui de PX à PZ. Item, que le point P et le centre C soient donnés de position, et que les rayons R et R′ soient donnés de grandeur, si le rapport de PX à PY doit être constant, la position du centre Z est déterminée par la proportion : R : R′ = CP : PZ ; et le rapport constant de PX à PY est celui de R à R′.

§ 29.

Problème. Soient un point et une droite donnés de position. Par ce point soient menées deux droites, faisant entr'elles un angle donné et ayant entr'elles un rapport donné. Que l'extrémité d'une de ces droites soit à la droite donnée de position, on demande le lieu de l'extrémité de l'autre droite.

Soit P un point donné de position, et soit AA′ une droite donnée de position. Par P soient menées deux droites PX et PY faisant entr'elles un angle donné XPY et ayant entr'elles un rapport donné. Que la première droite PX soit terminée en X à la droite donnée de position, on demande le lieu de l'extrémité Y de la seconde droite. Fig. 13.

Analyse. Soit PB perpendiculaire à AA′ ; soit PD faisant avec PB l'angle BPD égal à l'angle donné, et que PD soit à PB dans le rapport donné, soit menée DY.

Puisque les angles BPD, XPY sont égaux entr'eux ; les angles BPX, DPY, sont aussi égaux entr'eux ; et partant, les triangles BPX, DPY, qui ont les côtés proportionnels autour d'un angle commun, sont semblables, et en particulier les angles B et D sont égaux entr'eux ; mais l'angle B est droit, donc l'angle D est droit ; donc le point Y est à une droite donnée de position, perpendiculaire à PD et élevée depuis le point donné D.

Construction. Soit PB perpendiculaire à AA′. Soit l'angle BPD égal à l'angle donné ; et soit le rapport de PB à PD égal au rapport donné. Du point D soit élevée à PD une perpendiculaire DZ, elle sera le lieu cherché des points Y.

Démonstration. Soient PX et PY, faisant entr'elles l'angle XPY égal à l'angle BPD, et terminées à la droite AA′ et à la perpendiculaire à PD. Les angles BPX, DPY sont égaux entr'eux ; donc les triangles rectangles BPX, DPY, sont équiangles et semblables, et en particulier PX : PY = PB : PD.

Remarque 1.re La droite PD qui fait avec PB l'angle donné ϕ, peut être située des deux côtés de PB ; et la droite PD donnée de grandeur, peut être portée sur PD de part et d'autre du point P. De là, envisagé sous un point de vue général, le problème proposé est susceptible de quatre solutions, en n'ayant pas égard à la direction des droites menées PX, PY.

Digitized by Google

Remarque 2.° Que le lieu cherché rencontre AA′ en Z; et que PB rencontre le même lieu en S. L'angle Z est égal à l'angle donné ϕ; et l'angle S est le complément du même angle. De là, on détermine par le calcul la position de chacun des points S et Z.

$$PS = PD \sec.\phi;\ BS = PD \sec.\phi - PB;\ BZ = BS \cot.\phi = PD \operatorname{cosec}.\phi - PB \cot.\phi.$$

Remarque 3.° Soit $\phi = 0$, ou que les droites PB et PD coïncident; le lieu des points Y est parallèle à la droite AA′ (§ 26).

Porisme, relatif au lieu proposé. Soient deux droites qui se coupent données de position, et soit un point donné de position. On peut déterminer en même tems un angle et un rapport; de manière que menant par ce point deux droites faisant entr'elles l'angle à déterminer et terminées aux droites données de position, elles soient entr'elles dans ce rapport. Savoir, l'angle à déterminer est celui que font entr'elles les droites données de position; et le rapport à déterminer, est celui qu'ont entr'elles les perpendiculaires abaissées du point donné sur les mêmes droites.

Ce qui a été dit sur les droites menées d'un seul point P, s'applique aux droites menées de deux points P et P′ donnés de position, d'après le principe exposé dans le § 26, 7°.

§ 30.

Problème. Soit un point donné de position; et soit un cercle donné de grandeur et de position. Par ce point soient menées deux droites, faisant entr'elles un angle donné et ayant l'une à l'autre un rapport donné. Que l'extrémité d'une de ces droites soit à la circonférence du cercle donné; on demande le lieu de l'extrémité de l'autre droite.

Fig. 14. Soit C le centre d'un cercle donné dont le rayon est R. Soit P un point donné de position; soit ϕ un angle donné; et soit un rapport donné, celui de m à n. Par P soient menées deux droites PX et PY, faisant entr'elles l'angle ϕ; et ayant entr'elles le rapport donné de m à n. Que les points X soient à la circonférence du cercle donné, on demande le lieu des points Y.

Analyse. Que la droite PC, rencontre en A et en A′ la circonférence du cercle donné. Sur CP soit fait en P un angle CPZ égal à l'angle donné ϕ; et soit chacun des rapports de AP à PB et de A′P à PB′, égal au rapport donné de m à n. Soit BB′ coupée en Z en deux parties égales. Puisque,

$$m : n = AP : PB = A'P : PB'; \text{ aussi,}$$

$$m : n = AP + PA' : BP + PB' = A'P - PA : B'P - PB$$
$$= 2CP : 2PZ = 2CA : 2ZB = CP : PZ = CA : ZB.$$

Puisque

Puisque les angles CPZ, XPY, sont l'un et l'autre égaux à l'angle ϕ; les angles CPX, ZPY, sont égaux entr'eux; et les rapports de PX à PY et de PC à PZ, sont l'un et l'autre égaux au rapport donné de m à n; donc les triangles CPX, ZPY, sont semblables, et en particulier: $CX:ZY=CP:PZ=m:n$. Donc, la droite ZY est donnée de grandeur; mais le point Z est donné de position; donc le lieu des points Y est une circonférence de cercle donnée.

Construction. Soit menée PC. Soit fait l'angle CPZ égal à l'angle donné ϕ; et soit fait le rapport de CP à PZ égal au rapport donné de m à n. Soit aussi changé le rapport de m à n, dans celui du rayon R du cercle donné, à une droite R'. Du point Z comme centre, avec le rayon R', soit décrite une circonférence de cercle; elle sera le lieu cherché des points Y.

Démonstration. Soit menée à la première circonférence une droite quelconque PX, et soit mené le rayon CX. Soit mené le rayon ZY faisant avec PZ un angle PZY égal à l'angle PCX; soit menée PY; et soient les rayons CX et ZY d'un même côté relativement à PC et à PZ.

Dans les triangles CPX, ZPY, les angles en C et en Z sont égaux entr'eux, et $PC:PZ=CX:ZY$; donc, ces triangles sont semblables, et en particulier: $PX:PY=PC:PZ=m:n$. Item, les angles CPX, ZPY, sont égaux entr'eux; donc aussi, les angles CPZ, XPY, sont égaux entr'eux; mais l'angle CPZ a été fait égal à l'aogle donné ϕ; donc aussi, l'angle XPY est égal au même angle donné.

Remarque 1re. L'angle CPZ égal à l'angle ϕ peut être fait des deux côtés de la droite PC; et la droite PZ de grandeur donnée, peut être portée de part et d'autre du point P sur la seconde jambe de cet angle. Partant, en envisageant le lieu proposé d'une manière générale, indépendante des directions des ligues à mener, la question paroît susceptible de quatre solutions, mais elles diffèrent seulement par la position.

En général, on peut faire sur ce lieu des remarques correspondantes à celles qui ont été faites sur le problème du § 28; lequel n'est qu'un cas particulier de celui-ci. Par exemple, que PX et PY, rencontrent de nouveau en X' et en Y' les deux circonférences, et soient Px et Py, tangentes à ces deux cercles;

$$PX : PY = Px : Py$$

Donc, $PX\times PY' : PY\times PY' = Px\times Py : Py^2$

Mais, $PY\times PY' = Py^2$

Donc, $PX\times PY' = Px\times Py$. Partant, on détermine en même tems le lieu des points Y', lorsque le rectangle $PX\times PY'$ est donné de grandeur, sans qu'il soit besoin de traiter ce dernier lieu séparément.

Remarque 2.e Porisme. Soient deux cercles donnés de grandeur et de position, et soit φ un angle donné. On peut déterminer en même tems la position d'un point et la grandeur d'un rapport, de manière que les droites menées de ce point sous l'angle donné et terminées aux circonférences des deux cercles, soient entr'elles dans le rapport à assigner. Savoir, ce rapport est celui des rayons des deux cercles; le point cherché est sur la circonférence du segment capable de l'angle donné, décrit sur la droite qui joint leurs centres comme base; et les distances de ce point aux centres des deux cercles, sont entr'elles comme les deux rayons; ce qui ramène la position de ce point au problème déterminé suivant : trouver sur la circonférence d'un segment de cercle donné, le point dont le rapport des distances aux extrémités de sa base est donné.

Ce problème se résout comme il suit. Soit fait un triangle dont deux côtés comprennent l'angle donné, et sont respectivement égaux aux rayons des deux cercles donnés. Puis, soit fait un triangle semblable à celui-là, et dont le côté opposé à l'angle donné, soit égal à la distance des centres des deux cercles donnés; les côtés de ce dernier triangle seront respectivement égaux aux distances du point cherché aux centres des deux cercles donnés.

Calcul. Soient r et r' les rayons des deux cercles, soit b la distance des centres, et soit φ l'angle donné, les distances du point cherché aux centres des deux cercles, sont $b\times\frac{r}{\sqrt{(rr-2rr'\cos.\varphi+r'r')}}$, $b\times\frac{r'}{\sqrt{(rr-2rr'\cos.\varphi+r'r')}}$.

Remarque 3.e Le cas dans lequel les droites à mener partent de deux points P et P', est réduit au cas dans lequel ces deux points coïncident, d'après l'observation faite au § 26, 7°.

§ 31.

Problème. Soit un point donné de position, et soit une droite aussi donnée de position. Par ce point soit menée une droite quelconque. Sur cette droite soient deux points, tels, que le rectangle de leurs distances au premier point, soit donné de grandeur. Que l'un de ces points soit à la droite donnée de position; on demande le lieu de l'autre point.

Fig. 15. Soit AA' une droite donnée de position; et soit P un point donné de position. Par P soit menée une droite PX qui rencontre en X la droite AA'. Sur PX soit déterminé le point Y, tel, que le rectangle PX×PY, soit égal à un espace donné S; on demande le lieu des points Y.

Analyse. Soit PB perpendiculaire à AA'; sur PB soit le point D, tel,

que le rectangle BP×PD, soit égal à l'espace donné S; et soit menée DY.

On doit avoir, BP×PD=XP×PY;

Donc, BP : XP=PY : PD; donc les triangles BPX, YPD, sont semblables, et en particulier les angles en B et en Y sont égaux entr'eux. Mais, l'angle en B est droit, donc l'angle en Y est aussi droit; donc le point Y est à la circonférence du cercle dont PD est le diamètre.

Construction. Soit PB perpendiculaire à AA'. Sur PB soit déterminé le point D, tel, que BP×PD=S. Sur PD comme diamètre soit décrit un cercle; sa circonférence est le lieu cherché.

Démonstration. Les triangles rectangles PBX, PYD, sont équiangles, et partant : PB:PX=PY:PD; et BP×PD=XP×PY.

Remarque 1.re La droite PD peut-être portée sur PB de part et d'autre du point P; et partant, il y a deux cercles égaux dont les diamètres sont sur la même droite PB de part et d'autre du point P, qui satisfont au problème proposé. Pour l'un de ces cercles, les points X et Y sont situés du même côté du point P, et pour l'autre de ces cercles ces points sont situés des deux côtés du point P.

Remarque 2.e *Réciproquement.* Soit P un point donné sur la circonférence d'un cercle. Par P soit menée une droite quelconque PY terminée à la circonférence de ce cercle. Soit prise sur cette droite depuis le point P une droite PX telle, que le rectangle XP×PY soit donné de grandeur; les points X sont à une droite donnée de position. Savoir, soit mené le diamètre PD, sur lequel soit portée la ligne PB telle que le rectangle BP×PD soit égal à l'espace donné de grandeur. Du point B soit élevée à PB une perpendiculaire, cette perpendiculaire sera le lieu des points X.

Comme la ligne PB peut être portée des deux côtés du point P; si la direction des droites PX n'est pas déterminée, il y a deux droites qui répondent au lieu proposé.

Remarque 3.e *Porisme.* Soient une droite et un cercle donnés de position. On peut déterminer en même tems la position d'un point et la grandeur d'un rectangle; de manière que menant par ce point une droite quelconque, le rectangle des parties de cette droite comprises entre ce point et les points dans lesquels elle rencontre la droite et la circonférence, soit égal à l'espace à déterminer.

Savoir, le point à déterminer est l'une ou l'autre des extrémités du diamètre perpendiculaire à la droite donnée de position, et l'espace à déterminer de grandeur, est le rectangle du diamètre par la distance de cette

Digitized by Google

extrémité à la droite donnée de position. Partant, la question proposée a deux solutions.

Fig. 16. *Remarque* 4.° Ce qui a été dit pour le cas dans lequel les droites PX et PY sont en ligne droite, s'étend aussi au cas dans lequel ces droites font entr'elles un angle donné φ. En effet, soit PB perpendiculaire à AA'. Soit fait l'angle BPD égal à l'angle donné; et soit le rectangle $BP \times PD$ égal à l'espace donné. Soit menée PX qui rencontre AA' en X, soit fait l'angle $XPY = BPD$; et soit $XP \times PY = BP \times PD$.

Puisque les angles BPD, XPY, sont égaux entr'eux, les angles BPX, DPY sont aussi égaux entr'eux; et puisque $BP \times PD = XP \times PY$; $BP : PY = PX : PD$; et partant, les triangles BPX, YPD sont semblables, et en particulier les angles en B et en Y seront égaux entr'eux; mais, l'angle B est droit, donc l'angle Y est droit, donc le point Y est à la circonférence d'un cercle dont PD est le diamètre.

Réciproquement. Si le point Y est à la circonférence d'un cercle donné, le point X est à une ligne droite donnée de position.

Remarque 5.° ce qui vient d'être dit sur le cas dans lequel les droites PX et PY sont menées d'un même point P, s'applique au cas dans lequel ces droites sont menées de deux points P et P' (§ 26, 7.°).

§ 32.

Problème. Soit un cercle donné de grandeur et position. Par un point de la circonférence de ce cercle soit menée une droite de grandeur donnée et parallèle à une droite donnée de position; on demande le lieu de l'extrémité de cette droite.

Fig. 17. Soit C le centre d'un cercle donné dont le rayon est R. Par un point X de la circonférence de ce cercle, soit menée une droite XY de grandeur donnée et parallèle à une droite donnée de position, on demande le lieu des points Y.

Du centre C soit menée CZ égale et parallèle à XY; et soient menées CX et ZY. Dans le quadrilatère CXYZ, les côtés CZ et XY sont égaux entr'eux et parallèles entr'eux, donc ce quadrilatère est un parallélogramme, et en particulier $ZY = CX$. Donc le lieu des points Y est la circonférence d'un cercle donné dont Z est le centre et dont R est le rayon.

Construction. Par le centre soit menée une droite CZ parallèle à la droite donnée de position, et de la grandeur donnée; puis, du point Z comme centre avec le rayon R, soit décrite une circonférence de cercle, elle sera le lieu cherché.

Démonstration.

Digitized by Google

Démonstration. Ayant mené XY parallèle à CZ, soit mené ZY parallèle à CX et rencontrant XY en Y. Dans le quadrilatère CZYX les côtés opposés sont parallèles ; partant, ce quadrilatère est un parallélogramme, et en particulier XY est égale et parallèle à CZ.

Remarque. Porisme. Deux cercles égaux étant donnés de grandeur et de position, on peut déterminer en même tems la position d'une droite et la grandeur d'une droite ; de manière que menant à la première droite des parallèles terminées aux circonférences des deux cercles, elles soient égales à la seconde droite.

Savoir, la droite à déterminer de position est la droite qui joint les centres des deux cercles ou est parallèle à elle ; et la droite à déterminer de grandeur est la distance des deux centres.

§ 33.

Problème. Soient deux droites qui se coupent données de position ; trouver le lieu des points de chacun desquels menant aux deux premières des droites sous des angles donnés, leur rapport soit donné.

Soient SA et SA′ deux droites données de position qui se coupent en S. Fig. 18. 1.° On demande le lieu des points M de chacun desquels menant des droites MP, MP′, qui fassent avec SA et SA′ des angles donnés, leur rapport soit donné.

Premier cas. Que les droites Mp et Mp′, soient respectivement parallèles aux droites SA′ et SA.

Le quadrilatère MpSp′ est un parallélograme, et partant, Mp′=Sp. Donc, le rapport de Mp à Sp est donné ; mais l'angle p est donné, donc le triangle SpM est donné d'espèce, et en particulier l'angle ASM est donné ; donc le point M est à une droite donnée de position.

Construction. Sur les droites SA et SA′ soient prises des droites Sp et Sp′ qui soient entr'elles dans le rapport donné des droites Mp′ et Mp. Soit achevé le parallélogramme dont S est un angle, et dont Sp et Sp′ sont les côtés. La diagonale SM de ce parallélogramme est le lieu cherché.

Démonstration. Elle découle immédiatement de l'analyse.

Second cas. Que les angles P et P′ soient quelconques. Soient menées les droites Mp et Mp′ respectivement parallèles aux droites SA′ et SA. Dans les triangles MpP, Mp′P′, les angles sont donnés ; donc les rapports de MP à Mp et de MP′ à Mp′ sont l'un et l'autre donnés ; mais le rapport de MP à MP′ est supposé donné ; donc, le rapport de Mp à Mp′ est donné. Donc (1.er cas), le point M est à une droite SM donnée de position.

Fig. 18. 2°. *Construction.* Sur une même droite sa, soient faits des angles asa', asm, asm', respectivement égaux à l'angle S et aux supplémens des angles MPS, MP'S. Sur les jambes sm, sm', soient prises des droites sm et sm' qui soient entr'elles dans le rapport donné que doivent avoir entr'elles les droites MP et MP'. Par les points m et m' soient menées à sa' des parallèles mn, m'n', qui rencontrent sa en n et en n'. Puis, par le premier cas, soit déterminé le lieu des points M, tels, que menant Mp et Mp' respectivement parallèles à SA' et à SA, le rapport de Mp à Mp' soit égal au rapport de mn à m'n'; il sera le lieu cherché.

Démonstration. Les triangles MPp, MP'p', sont respectivement semblables aux triangles msn, m'sn'; de là, on a les proportions :

$$MP : Mp = ms : mn$$
$$Mp : Mp' = mn : m'n' \text{ (constr.)}$$
$$Mp' : MP' = m'n' : m's.$$

Donc, $MP : MP' = ms : m's$; c'est-à-dire dans le rapport donné.

Remarque 1.re Le cas des angles quelconques P et P' est toujours réduit au cas des angles droits, ou au cas dans lequel on connoît le rapport des perpendiculaires abaissées d'un même point M sur les droites SA et SA' données de position.

Ce dernier cas peut aussi être traité comme il suit :

Fig. 19. Sur les droites données de position soient portées des droites SA, SA', telles que $SA : SA' = MP' : MP$, ou $SA \times MP = SA' \times MP'$. Des points A et A' soient abaissées sur la droite SM des perpendiculaires Ap, A'p'. Les triangles SMP, SMP', sont respectivement semblables aux triangles SAp, SA'p'; et partant, les rectangles $SA \times MP$ et $SA' \times MP'$, sont respectivement égaux aux rectangles $SM \times Ap$, $SM \times A'p'$. Mais, les deux premiers rectangles doivent être égaux entr'eux; donc aussi les deux rectangles $SM \times Ap$, $SM \times A'p'$, doivent être égaux entr'eux; et les lignes Ap, A'p', doivent être égales entr'elles. Que AA' rencontre SM en Z; les triangles rectangles AZp, A'Zp', équiangles entr'eux ont les côtés Ap, A'p' égaux entr'eux; donc aussi $AZ = A'Z$. De là, découle la construction suivante.

Sur les droites données de position soient prises des droites SA, SA', inversément proportionnelles aux droites qui expriment le rapport des perpendiculaires MP et MP'. Soit menée AA', laquelle soit coupée en deux parties égales au point Z. La droite SZ est le lieu des points M.

Remarque 3.e Le problème général peut aussi être ramené au cas particulier, dans lequel les droites MP et MP' sont en ligne droite.

Fig. 18. En effet, que MP rencontre SA' en R. Le triangle MP'R est donné d'espèce,

comme ayant tous ses angles donnés ; donc le rapport de MR à MP′ est donné ; mais le rapport de MP′ à MP est supposé donné ; donc, le rapport de MR à MP est donné ; donc aussi le rapport de PR à MP est donné ; mais le triangle SPR est donné d'espèce, donc le rapport de PR à SP est donné ; donc aussi le rapport de MP à SP est donné ; mais l'angle en P est donné ; donc, le triangle MSP est donné d'espèce, et en particulier l'angle MSP est donné, et les points M sont à une droite SM donnée de position.

Remarque 4.e Le lieu des points M est situé soit dans l'angle ASA′, soit dans son opposé au sommet. Les directions des droites menées des points situés dans l'un de ces angles sont l'une et l'autre opposées aux directions des droites menées des points situés dans l'autre ; partant, ces droites changent l'une et l'autre de signe ; mais l'exposant de leur rapport conserve son signe.

Si on suppose les points M situés dans l'un des angles de suite de l'angle ASA′ et partant aussi dans l'autre, la direction et partant le signe d'une seule des droites menées des points situés dans ces angles ont changé, et partant le signe de l'exposant de leur rapport est aussi changé. L'assemblage des deux lieux correspondans à ces deux paires d'angles, réunit tous les points qui jouissent de la propriété proposée, en n'ayant pas égard à la direction ou aux signes des droites menées.

Remarque 5.e Soient deux droites qui se coupent données de position ; de différens points de l'une soient menées à l'autre des droites sous des angles donnés ; et des mêmes points soient menées des droites parallèles à une droite donnée de position, et qui ayent aux premières droites correspondantes un rapport donné, les extrémités de ces dernières droites sont aussi à une droite donnée de position.

Remarque 6.e La solution du problème proposé dans ce §, renferme celle du problème suivant. Soient deux droites données de position, et soient deux points donnés, un sur chacune de ces droites ; on demande le lieu des points de chacun desquels abaissant sur ces droites des perpendiculaires, elles retranchent des premières droites, à compter depuis les points donnés sur elles, des segmens dont le rapport est donné.

Pour cela, soient élevées aux droites données depuis les points donnés sur elles des perpendiculaires, et soient regardées ces perpendiculaires comme étant les droites données de position relativement auxquelles le premier problème est proposé.

Ce qui est vrai pour le cas du perpendicularisme, est vrai pour des droites menées sous des angles donnés.

Digitized by Google

Remarque 7.° Envisagé trigonométriquement, le problème proposé revient à couper un angle donné en deux parties dont le rapport des sinus est donné.

Soit par exemple traité le cas dans lequel les angles P et P′ sont droits ; MP : MP′ = sin. MSP : sin. MSP′ = SA′ : SA.

Donc, $SA'+SA : SA'-SA = \text{tang. } \frac{1}{2}S : \text{tang. } \frac{MSP-MSP'}{2}$.

§ 34.

Problème. Soient deux droites qui se coupent données de position sur un plan. On demande sur ce plan le lieu des points de chacun desquels abaissant sur ces droites des perpendiculaires (dans une direction déterminée relativement à ces droites), la somme de leurs rectangles par des droites données de grandeur soit donnée de grandeur.

FIG. 20. Soient SA, SA′, deux droites qui se coupent en S données de position sur un plan ; et soient m et m' deux droites données de grandeur. On demande le lieu des points Y, de chacun desquels abaissant sur les droites SA, SA′, les perpendiculaires YP, YP′ ; la somme $m \times YP + m' \times YP'$, soit donnée de grandeur.

Analyse. Soit l'espace donné de grandeur égal au rectangle de la droite donnée m par une autre droite qui sera donnée de grandeur, laquelle soit portée sur PY depuis le point P : soit cette droite Pp ; et par P soit menée à SA une parallèle BB′ qui rencontre SA′ en C′. Puisque,

$$m \times YP + m' \times YP' = m \times Pp$$
$$m' \times YP' = m \times pY ; \text{ donc,}$$
$$m : m' = YP' : pY.$$

Mais les droites BB′, SA′, qui se coupent en C′ sont données de position ; donc, le lieu des points Y est une droite donnée de position (§ 33).

Construction. Que l'espace donné de grandeur soit changé en un rectangle ayant la ligne m pour un de ses côtés. D'un point quelconque de SA soit élevée à SA une perpendiculaire égale à l'autre côté : du sommet de cette perpendiculaire soit menée à SA une parallèle BB′ qui rencontre SA′ en C′ ; puis (§ 33), soit déterminé le lieu C′C des points Y, dont le rapport des distances aux droites données de position SA′, BB′, soit le rapport donné des droites m et m'. Ce lieu est aussi celui qui répond à la question proposée.

Démonstration. Par la construction YP′ : Yp = m : m′ ; donc,

$$m' \times YP' = m \times Yp ; \text{ donc}$$
$$m' \times YP' + m \times YP = m\,(Yp + YP) = m \times Pp.$$

Remarque

Digitized by Google

Remarque 1.re Puisque YP′ : Yp = m : m′; la direction de la droite CC′ relativement aux droites données de position SA′, BB′ ou SA′ et SA, dépend seulement du rapport donné des droites m′ et m, et elle est indépendante de la grandeur de l'espace donné : de manière que le rapport de ces droites m′ et m, restant le même, les lieux correspondans des points Y sont parallèles entr'eux; et leur distance au point S dépend de la grandeur de l'espace donné.

Que le lieu des points Y rencontre en C′ et en C les droites SA′ et SA; sin. SC′C : sin. SCC′ = m′ : m; ou, SC : SC′ = m′ : m; et m × SC = m′ × SC′.

L'espace donné étant m × Pp; on a SC′ = Pp cosec. S; et $SC = SC' \times \frac{m'}{m} = \frac{m'}{m} Pp$ cosec. S.

Remarque 2.e Le lieu proposé a été traité dans la supposition que les points Y sont dans l'angle ASA′. Or, ce lieu est aussi situé en partie dans chacun des angles de suite A′Sa, ASa′, de l'angle ASA′. Pour les points situés dans l'angle A′Sa, la perpendiculaire YP′ change de direction relativement à la droite SA′, et partant aussi de signe, et la différence m × YP — m′ × YP′ est égale à l'espace donné. Au contraire, pour les points situés dans l'angle ASa′, la différence m′ × YP′ — m × YP est égale à l'espace donné de grandeur.

Réciproquement. Si on regarde comme positive chacune des perpendiculaires abaissées des points situés dans l'angle A′Sa; le lieu proposé sera situé en partie dans cet angle A′Sa, et en partie dans l'angle ASA′ et dans son opposé au sommet aSa′; et la somme m × YP + m′ × YP′ devient la différence m × YP — m′ × YP′, pour les points situés dans l'angle ASA′, et elle devient la différence m′ × YP′ — m × YP, pour les points situés dans l'angle aSa′, conformément à la correspondance qui a lieu entre les changemens de direction et les changemens de signe des perpendiculaires abaissées sur les droites données.

Remarque 3.e J'ai traité le lieu proposé en montrant sa dépendance du lieu développé dans le § 53, et en le réduisant à ce dernier. On peut aussi le traiter immédiatement comme il suit, d'une manière très-lumineuse, qui trouvera des applications étendues.

Soit menée SY. Sur les droites données de position soient prises depuis le point S les droites SA, SA′, respectivement égales aux droites données de grandeur *m* et *m′*; et des points A et A′ soient abaissées sur SY les perpendiculaires AQ, A′Q′. FIG. 21.

Les triangles YSP, YSP′, sont respectivement semblables aux triangles ASQ, A′SQ′; et partant, les rectangles SA × YP et SA′ × YP′, sont respectivement égaux aux rectangles SY × AQ, SY × A′Q′; donc, la somme donnée

des premiers rectangles est égale au rectangle SY (AQ+A'Q'). Soit A'S prolongée en a' d'une quantité Sa'=SA', et soit a'q' perpendiculaire à SY; A'Q'=a'q'; et l'espace proposé est SY (AQ+a'q'). Soit Aa' coupée en Z en deux parties égales; et soit ZV perpendiculaire à SY; on a AQ+a'q'=2ZV (§ 1); partant, SY (AQ+a'q')= 2SY×ZV. Soit aussi YX perpendiculaire à SZ; les triangles YSX, ZSV, sont semblables; et partant, SY×ZV=SZ×YX. Donc, l'espace donné de grandeur est aussi 2SZ×XY. Mais les points S et Z sont donnés de position; donc, la droite SZ est donnée de grandeur et de position; donc, la droite YX est donnée de grandeur. Donc, le lieu des points Y est une droite donnée de position parallèle à SZ. De là découle la construction suivante.

Construction. Sur les droites données de position soient portées depuis leur point de section S, des droites SA, SA', respectivement égales aux droites données de grandeur *m* et *m'*; et sur le prolongement de A'S soit prise Sa'=SA'. Soit menée Aa', laquelle soit coupée en Z en deux parties égales. Soit changé l'espace donné de grandeur, en un rectangle ayant 2SZ pour un de ses côtés; et à SZ soit élevée une perpendiculaire égale à l'autre côté. Par le sommet de cette perpendiculaire soit menée à SZ une parallèle CC', elle sera le lieu cherché.

Démonstration. En admettant la construction de l'analyse;

SA×YP+SA'×Y P'=

SY×AQ+SY×A'Q'=2SY×VZ=2SZ×YX.

Remarque 4.° Puisque CC' est parallèle à SZ; les angles C et C' qu'elle fait avec les droites SA, SA', sont respectivement égaux aux angles que la droite SZ fait avec les mêmes droites. Donc; le lieu cherché est parallèle à AA'.

En effet, puisque Sa'=SA' et Za'=ZA; les droites SZ et AA' sont parallèles; mais CC' est parallèle à SZ, donc aussi CC' est parallèle à AA'.

Remarque 5.° Les points Y étant supposés placés dans l'angle ASA'; que l'espace donné de grandeur soit la différence SA×YP—SA'×YP'; le point Z est le milieu de AA': la droite CC' est située en partie dans l'angle ASA', en partie dans son angle de suite A'Sa, et en partie dans son opposé au sommet aSa'.

Remarque 6.° En particulier; que l'espace donné de grandeur soit zéro, et partant, que les rectangles SA×YP, SA'×YP', doivent être égaux entr'eux: ou qu'on doive avoir la proportion SA : SA'= YP' : YP; le lieu des points Y est la droite SZ elle-même; et partant, le lieu proposé dans le § 33.° n'est qu'un cas particulier de celui que je viens de développer.

Remarque 7.° *Porisme.* Soient deux droites données de position, et soient

deux droites correspondantes données de grandeur. On peut déterminer en même tems la position d'une troisième droite, et la grandeur d'une droite correspondante, de manière qu'on ait la proposition suivante. D'un point quelconque soient abaissées sur les droites données de position, et sur la droite à déterminer de position, des perpendiculaires. La somme des rectangles des perpendiculaires (prises dans des directions déterminées) abaissées sur les deux premières droites, par les droites correspondantes données de grandeur, est égale au rectangle de la perpendiculaire abaissée sur la troisième droite par la droite à déterminer de grandeur.

Remarque 8.° Tout ce qui a été dit sur le cas des droites perpendiculaires aux droites données de position, doit être entendu des droites menées à celles-ci, sous des angles donnés; puisque les obliques ont aux perpendiculaires correspondantes des rapports connus.

Remarque 9.° La question traitée dans ce § renferme la question suivante. Soient deux droites qui se coupent données de position; et soient des points donnés de position sur chacune d'elles. D'un point soient abaissées sur ces droites des perpendiculaires. Que la somme (ou la différence) des rectangles des segmens retranchés par ces perpendiculaires, à compter depuis les points donnés, par des droites données de grandeur, soit donnée de grandeur; on demande le lieu de ce point. En effet, aux droites données de position, on substitue les perpendiculaires à ces droites élevées depuis les points donnés.

Le problème développé dans ce §, traité suivant le second procédé, peut servir d'introduction au problème général suivant.

§ 35.

Problème. Soient des droites qui se coupent en un même point données de position, et soient des droites en même nombre données de grandeur. D'un point soient abaissées sur les premières droites des perpendiculaires (chacune dans une direction déterminée); et soit prise la somme des rectangles de ces perpendiculaires par les droites correspondantes données de grandeur. Que cette somme soit égale à un espace donné de grandeur; on demande le lieu de ce point.

(1) Soient SA, SA′, SA″, SA‴.... SA^x, des droites qui se coupent en un même point S, données de position sur un plan. Soient m, m′, m″, m‴.... m^x, des droites correspondantes données de grandeur. D'un point Y soient abaissées

(1) D'après le développement du cas particulier de deux droites, et la figure 21.e qui y est relative, il est aisé de suppléer la figure pour l'exposition du problème général.

sur les droites données de position les perpendiculaires YP, YP′, YP″, YP‴...YP^{x}; et soit prise la somme de leurs rectangles par les droites correspondantes données de grandeur m, m′, m″, m‴.... m^{x}. Que cette somme soit égale à un espace *S* donné de grandeur; on demande le lieu des points Y.

Soient regardés les angles ASA′, ASA″, ASA‴, ASA^{iv}.... ASA^{x}, comme allant en croissant successivement. Et soit regardé le point Y comme étant dans l'angle A^{x}Sa supplément de l'angle ASA^{x}. Sur les droites SA, SA′, SA″, SA‴, SA^{iv}... SA^{x}, soient portées depuis le point S les droites SA, SA′, SA″, SA‴, SA^{iv}.... SA^{x}, respectivement égales aux droites données de grandeur m, m′, m″, m‴, m^{iv}.... m^{x}. Soit menée SY, sur laquelle soient abaissées les perpendiculaires AQ, A′Q′, A″Q″, A‴Q‴, A^{iv}Q^{iv}.... A^{x}Q^{x}.

Les triangles YSP, YSP′, YSP″, YSP‴, YSP^{iv}.... YSP^{x},
ASQ, A′SQ′, A″SQ″, A‴SQ‴, A^{iv}SQ^{iv}.... A^{x}SQ^{x}, sont respectivement semblables deux à deux, et de là les rectangles
SA×YP, SA′×YP′, SA″×YP″, SA‴×YP‴, SA^{iv}×YP^{iv}.... SA^{x}YP^{x},
SY×AQ, SY×A′Q′, SY×A″Q″, SY×A‴Q‴, SY×A^{iv}Q^{iv}.... SY×A^{x}Q^{x},
sont aussi égaux deux à deux; partant, la somme donnée des premiers rectangles est égale à la somme SY(AQ+A′Q′+A″Q″+A‴Q‴+A^{iv}Q^{iv}+...+A^{x}Q^{x}); donc cette dernière somme est donnée de grandeur. Soit Z le centre des moyennes distances des points A, A′, A″, A‴, A^{iv}.... A^{x}, dont le nombre est $n+1$; soit ZV perpendiculaire à SY; soit aussi mené SZ sur laquelle soit abaissée la perpendiculaire YX.

On a, AQ+A′Q′+A″Q″+A‴Q‴+A^{iv}Q^{iv}+....+A^{x}Q^{x}=(n+1) ZV (§ 5) et comme les triangles YSX, ZSV, sont semblables, SY×ZV=SZ×YX. Donc, le rectangle SZ×YX est donné de grandeur; mais la droite SZ est donnée de grandeur et de position, donc la droite XY est donnée de grandeur; donc, le point Y est à une droite donnée de position parallèle à SZ.

Construction. Sur les droites données de position soient portées depuis le point S les droites SA, SA′, SA″, SA‴, SA^{iv}.... SA^{x}, respectivement égales aux droites données de grandeur m, m′, m″, m‴, m^{iv}.... m^{x}. Soit Z le centre des moyennes distances des points A, A′, A″, A‴, A^{iv}.... A^{x}; soit menée SZ. Soit divisé l'espace donné de grandeur en parties égales dont le nombre soit égal à celui des lignes données de position; soit une de ces parties changée en un rectangle ayant pour un de ses côtés SZ. Soit élevée à SZ une perpendiculaire égale à l'autre côté; et du sommet de cette perpendiculaire soit menée à SZ une parallèle; elle sera le lieu cherché.

Démonstration.

Démonstration. Soit un point Y de cette droite, duquel on abaisse sur SZ la perpendiculaire YX.

Les triangles YSP, YSP′, YSP″, YSP‴.... YSP^{n}, YSX,

ASQ, A′SQ′, A″SQ″, A‴SQ‴....A^{n}SQ^{n}, ZSV, sont respectivement semblables deux à deux; de là, les rectangles

AS×YP, A′S×YP′, A″S×YP″, A‴S×YP‴....A^{n}S×YP^{n}, SZ×YX,

SY×AQ, SY×A′Q′, SY×A″Q″, SY×A‴Q‴....SY×A^{n}Q^{n}, SY×ZV, sont respectivement égaux deux à deux; mais la somme des rectangles

SY×AQ, SY×A′Q′, SY×A″Q″, SY×A‴Q‴....SY×A^{n}Q^{n}, est égale au rectangle SY×ZV pris autant de fois qu'il y a de droites (§ 5); donc aussi la somme des rectangles

SA×YP. SA′×YP′, SA″×YP″, SA‴×YP‴....SA^{n}×YP^{n}, vaut le rectangle SZ×XY pris le même nombre de fois; et partant, cette somme est égale à l'espace assigné.

Remarque 1.re En supposant le plus grand des angles ASA^{n} plus petit que deux droits; le centre Z des moyennes distances des points A, A′, A″, A‴....A^{n}, est dans cet angle; le problème est toujours possible, et la position du lieu cherché dépend de la position de la droite SZ à laquelle il est parallèle.

Que les droites AS, A′S, A″S, A‴S.... A^{n}S, soient prolongées au-delà de S, en a, a′, a″, a‴.... a^{n}.

1.° Le lieu des points Y est en partie dans l'angle A^{n}Sa, et les points appartenans à cette partie répondent à la question dans le sens propre de l'énoncé.

2.° Le lieu des points Y rencontre les droites qui sont situées au-delà de SZ relativement à SA, dans l'angle A^{n}SZ; et les perpendiculaires abaissées des points situés dans l'angle A^{n}SZ sur les droites correspondantes changent de direction et partant de signe, et la somme proposée devient une différence.

3.° Le lieu des points Y rencontre les droites qui sont situées entre SA et SZ dans leurs prolongemens au-delà de S; et pour les points situés dans l'angle opposé au sommet à l'angle ASZ, les perpendiculaires abaissées sur les droites correspondantes changent de direction et partant de signe, et la somme proposée devient encore une différence.

Remarque 2.° Au lieu de proposer le lieu cherché comme relatif à une somme, en tant qu'on le regarde comme situé dans la région A^{n}Sa; qu'on le propose comme étant relatif à une différence. La construction est la même, en substituant à ceux des points A, A′, A″, A‴.... A^{n}, qui sont relatifs aux termes à soustraire, les points correspondans a, a′, a″, a‴.... a^{n}, situés de l'autre côté du point S et à la même distance de lui. Il en est de même lorsqu'on regarde

comme positives quelques-unes des perpendiculaires abaissées des points situés dans l'angle ASA^n, et qui ont changé de direction.

Dans ce cas, lorsque les points dont on cherche le centre des moyennes distances, sont les uns d'un côté d'une droite quelconque menée par S, et les autres du côté opposé de cette droite, le centre Z des moyennes distances de ces points peut coïncider avec le sommet S; alors, l'espace proposé est déterminé à être zéro, et un point quelconque du plan répond aux conditions proposées. Cela a lieu en particulier, lorsque les droites données de grandeur et de position, sont parallèles et proportionnelles aux côtés d'un polygone d'un nombre de côtés égal à celui des droites données de position (§ 14).

Remarque 3.e Ce qui a été dit sur les perpendiculaires abaissées sur les droites données de position, s'applique aux segmens retranchés de ces droites par les perpendiculaires abaissées sur elles, à compter depuis le point de section de ces droites; en substituant aux droites données de position les perpendiculaires qui leur sont élevées depuis ce point.

Remarque 4.e *Porisme.* Des droites qui se coupent en un même point étant données de position, et des droites en même nombre étant données de grandeur; on peut déterminer en même tems la position d'une droite et la grandeur d'une autre droite, de manière qu'abaissant des perpendiculaires d'un point quelconque du plan sur les droites données de position, et sur la droite à déterminer de position, la somme des rectangles des premières perpendiculaires (dont chacune est prise suivant une direction déterminée) par les droites données de grandeur, soit égale au rectangle de la perpendiculaire abaissée du même point sur la droite à déterminer de position, par la droite à déterminer de grandeur.

Cette possibilité suppose cependant que le point de section des droites données de position n'est pas le centre des moyennes distances des extrémités des droites données de position.

Calcul. Puisque le lieu cherché est parallèle à SZ, les inclinaisons de ce lieu aux droites données de position sont respectivement les mêmes que les inclinaisons de SZ aux mêmes droites. L'inclinaison de SZ à SA par exemple, est déterminée par l'équation,

$$SA \sin. ASZ + SA' \sin. A'SZ + SA'' \sin. A''SZ + SA''' \sin. A'''SZ + \ldots + SA^n \sin. A^nSZ = 0.$$

ou,

$$\sin. ASZ\,(SA + SA' \cos. ASA' + SA'' \cos. ASA'' + SA''' \cos. ASA''' + \ldots + SA^n \cos. ASA^n)$$
$$+ \cos. ASZ\,(SA' \sin. ASA' + SA'' \sin. ASA'' + SA''' \sin. ASA''' + \ldots + SA^n \sin. ASA^n) = 0.$$

$$\text{tang. } ASZ = -\frac{SA' \sin. ASA' + SA'' \sin. ASA'' + SA''' \sin. ASA''' + \ldots + SA^n \sin. ASA^n}{SA + SA' \cos. ASA' + SA'' \cos. ASA'' + SA''' \cos. ASA''' + \ldots + SA^n \cos. ASA^n} = -\frac{P}{Q}$$

et $nSZ = \sqrt{(PP + QQ)}$. Voyez dissertation préliminaire § 12.

Application. Soient des droites en nombre quelconque qui se coupent en un même point, données de position sur un plan; et soient des droites en même nombre données de grandeur. Soit un autre système de droites en nombre quelconque qui se coupent en un même point, données aussi de position, et soit un pareil nombre de droites correspondantes données de grandeur. D'un même point soient abaissées sur toutes ces droites des perpendiculaires, et soient prises les sommes de leurs rectangles par les droites données de grandeur. Que ces deux sommes soient entr'elles dans un rapport donné, ou que ces sommes altérées par addition, ou par soustraction, d'espaces donnés, ou retranchées d'espaces donnés, soient entr'elles dans un rapport donné. Le lieu de ce point (si la question est déterminée) est une ligne droite.

§ 36.

Problème. Soit un polygone donné de grandeur et de position; et soient des droites en nombre égal à celui de ses côtés données de grandeur. D'un même point soient abaissées des perpendiculaires sur les côtés de ce polygone. Soient pris les rectangles de ces perpendiculaires par les droites correspondantes données de grandeur. Que la somme de ces rectangles (en prenant cette expression dans un sens général et algébrique) soit donnée de grandeur. On demande le lieu de ce point.

Je crois devoir introduire à la solution générale du problème proposé par l'exemple d'un polygone d'un petit nombre de côtés, et en particulier par l'exemple d'un triangle.

Pour ce cas, le problème proposé pourroit donner lieu à trois suppositions distinctes, quant aux positions des points cherchés dans les régions dans lesquelles le plan est divisé par les côtés du triangle et par leurs prolongemens.

1.° Les points cherchés sont dans l'intérieur du triangle.

2.° Ces points sont dans la partie du plan comprise entre un des côtés et les prolongemens des deux autres.

3.° Ces points sont dans l'angle opposé au sommet à l'un des angles du triangle.

Je vais traiter en détail l'un de ces cas, par exemple le premier. Il sera facile ensuite de montrer sa liaison avec chacun des autres.

Soit donc BSB′ un triangle donné, et soient m, m′, m″, trois droites données de grandeur. D'un point Y pris en dedans de ce triangle soient abaissées sur ses côtés SB, BB′, B′S, des perpendiculaires, YP, YP′, YP″. Que la somme $m \times YP + m' \times YP' + m'' \times YP''$, soit égale à un espace S donné de grandeur. On demande le lieu des points Y. FIG. 22.

Digitized by Google

Par l'un des sommets du triangle tel que S soit menée au côté opposé BB′ une parallèle, que YP′ rencontre cette parallèle en p′, on aura $YP'=P'p'-Yp'$; et partant la somme proposée est

$$m\times YP+m'(P'p'-Yp')+m''\times YP''=m\times YP-m'\times Yp'+m''\times YP''+m'\times P'p'.$$

Or, la droite P′p′ est donnée de grandeur, et partant, le rectangle $m'\times P'p'$ est donné de grandeur; donc, l'espace restant $m\times YP-m'\times Yp'+m''\times YP''$ est donné de grandeur. Donc, la question relative à trois droites qui forment un triangle est ramenée à la question relative à quelqu'un des cas de trois droites qui partent d'un même point.

Construction. D'un des sommets S du triangle proposé, soit menée au côté opposé BB′ une parallèle. Sur SB, sur la parallèle à BB′ menée par S, et sur la droite B′S prolongée de l'autre côté du point S, soient portées des droites SA, SA′, SA″, respectivement égales aux droites données de grandeur m, m′, m″, en tournant dans un même sens. Soit Z le centre des moyennes distances des points A, A′, A″. Que la perpendiculaire abaissée du point S sur BB′ soit désignée par *h*. Soient aussi AQ, A′Q′, A″Q″, ZV, perpendiculaires à SY, et soit YX perpendiculaire à SZ (1).

1.° Que l'espace donné de grandeur soit égal au rectangle $m'\times h$; la droite SZ est le lieu cherché. Si le centre Z des moyennes distances des points A, A′, A″, coïncide avec le point S, le lieu est indéterminé. Cela arrive lorsque les droites m, m′, m″, sont entr'elles comme les côtés SB, BB′, B′S, du triangle (§ 14), et en particulier lorsqu'elles sont égales à ces côtés; et dans le cas d'égalité lorsque l'espace donné est double de la surface du triangle.

2.° Que l'espace donné de grandeur ne soit pas égal au rectangle $m'\times h$. Soit convertie la différence en un rectangle ayant 3SZ pour un de ses côtés; et soit menée à SZ une parallèle éloignée d'elle d'une quantité égale à l'autre côté, et située du même côté du point S que la droite BB′ ou du côté opposé, suivant que le rectangle $m'\times h$ est plus grand ou plus petit que l'espace donné de grandeur. Cette parallèle est le lieu cherché.

Démonstration. Par la construction, $3SZ\times YX=S-m'\times h$.

Mais, $SZ\times YX=SY\times ZV$; donc, $3SY\times ZV=S-m'\times h$.

Or, $3ZV=AQ-A'Q'+A''Q''$; donc, $SY(AQ-A'Q'+A''Q'')=S-m'\times h$,

Ou, $SA\times YP-SA'\times Yp'+SA''\times YP''=S-m'\times h$.

$$m\times YP-m'\times Yp'+m''\times YP''=S-m'\times h.$$

$$m\times YP+m'\times YP'+m''\times YP''=S.$$

La démonstration est la même, lorsque $m'\times h>S$.

(1) Pour ne pas compliquer la figure, j'ai omis ces dernières perpendiculaires qu'il est facile de suppléer.

Remarque

Remarque 1.re Lorsque le point Z est différent du point S, la direction du lieu cherché qui est parallèle à SZ est déterminée par la droite SZ. Comme tous les systèmes de droites parallèles aux côtés du triangle proposé ne diffèrent que par leur position, quelque soit le point depuis lequel elles sont menées; si sur ces droites on porte depuis ce point des droites respectivement égales aux droites m, m′, m″; la direction de la droite menée du même point au centre des moyennes distances des extrémités des droites portées est la même dans chacun de ces systèmes; et partant, la direction du lieu cherché demeure la même, quelque soit le point du plan depuis lequel on mène les droites parallèles aux côtés du triangle donné, et elle dépend seulement du rapport qu'ont entr'eux les coefficiens donnés m, m′, m″.

Remarque 2.e Dans cette direction déterminée par les coefficiens m, m', m'' seulement, la position du lieu des points Y dépend de la grandeur de l'espace donné S. Si cet espace est égal au rectangle $m' \times h$, le lieu proposé convient avec la droite SZ; alors on a constamment $m \times YP + m'' \times YP'' = m' \times YP'$, pour les points situés dans le triangle BSB′, ou dans l'angle BSB′ au-delà de BB′; et alors, $m \times YP - m' \times YP' + m'' \times YP'' = S$; vu que pour les points situés au-delà de BB′ la direction de la droite YP′ est changée.

Remarque 3.e Les régions dans lesquelles est situé le lieu cherché, dépendent tant des grandeurs des coefficiens donnés que de la grandeur de l'espace donné; et les changemens de direction des perpendiculaires abaissées sur les côtés donnés relativement à chaque direction regardée originairement comme positive, déterminent les conversions de la somme proposée dans des différences.

Second cas. La question étant énoncée comme relative à une somme; que les points Y soient regardés comme étant situés dans la région comprise entre l'un des côtés BB′ et les prolongemens des autres côtés SB, SB′.

Dans ce cas, $YP' = Yp' - h$, et on a

$$m \times YP + m'(Yp' - h) + m'' \times YP'' = S; \quad m \times YP + m' \times Yp' + m'' \times YP'' = S + m' \times h.$$

Dans ce cas, le point s′ est sur A′S prolongée, et le point A″ est sur B′S prolongée. Le centre des moyennes distances des points A, a′, A″, est dans l'angle ASA″, il est différent du point S, et le problème est déterminé.

Troisième cas. La question étant énoncée comme relative à une somme, que les points Y soient regardés comme étant situés dans l'angle opposé au sommet de l'un des angles du triangle, par exemple de l'angle S.

Dans ce cas, $YP' = Yp' + h$, et on a l'équation

$$m \times YP + m' \times Yp' + m'' \times YP'' = S - h \times m'.$$

Dans ce cas la droite SA doit être portée sur BS prolongée au-delà du point S;

Digitized by Google

la droite SA″ est portée sur SB′; et la droite SA′ est portée sur la parallèle à BB′ du même côté relativement à SB. Les points A, A′, A″, sont situés d'un même côté de la droite SB; le centre *Z* des moyennes distances est dans l'angle ASB′, et le problème proposé est déterminé.

Corollaire. Porisme. Soit un triangle donné de grandeur et d'espèce; et soient trois droites correspondantes à ses côtés données de grandeur. On peut déterminer en même tems la position d'une droite et la grandeur d'une autre droite, de manière qu'on obtienne la proposition suivante. D'un point quelconque pris sur le plan du triangle soient abaissées des perpendiculaires sur ses côtés (chacune dans une direction déterminée), et une perpendiculaire à la droite à déterminer de position; soient pris les rectangles des premières perpendiculaires par les droites données de grandeur, et le rectangle de la dernière perpendiculaire par la droite à déterminer de grandeur. La somme (prise dans un sens général) des premiers rectangles est égale à la somme ou à la différence d'un espace donné et du dernier rectangle.

L'exemple du triangle que je viens de développer me paroît suffire pour introduire à l'exposition de la proposition générale.

(1) Soit $BB'B''B'''....B^{n-1}B^n$, un polygone donné de grandeur et d'espèce; et soient $m, m', m'', m'''....m^{n-1}, m^n$, des droites données de grandeur correspondantes aux côtés .... $BB', B'B'', B''B''', B'''B^{iv}....B^{n-1}B^n, B^nB$. On demande le lieu des points Y de chacun desquels abaissant les perpendiculaires $YP, YP', YP'', YP''', YP^{n-1}, YP^n$, sur les côtés de ce polygone, et prenant les rectangles de ces perpendiculaires par les droites correspondantes données de grandeur, la somme de ces rectangles soit donnée de grandeur.

Que les directions des perpendiculaires, en prenant le mot somme dans le sens propre de l'énoncé, soient regardées comme étant relatives à un point pris dans l'intérieur de la figure.

D'un point pris sur le plan de la figure, par exemple du sommet B soient menées des droites parallèles à ses côtés, en tournant toujours dans un même sens. Sur le côté BB′ et sur ces parallèles soient portées des droites $BA, BA', BA'', BA'''....BA^{n-1}, BA^n$, respectivement égales aux droites données de grandeur $m, m', m'', m'''....m^{n-1}, m^n$. Soient $h', h'', h''', h^{iv}....h^{n-1}$, les perpendiculaires abaissées du sommet B sur les côtés $B'B'', B''B''', B'''B^{iv}...B^{n-1}B^n$; et que les perpendiculaires abaissées du point Y sur les côtés rencontrent les parallèles aux côtés dans les points, $p', p'', p''', p^{iv}....p^{n-1}$.

---

(1) D'après l'exemple développé du triangle, il est aisé de suppléer à la figure.

Digitized by Google

On a $m\times YP+m'\times YP'+m''\times YP''+m'''\times YP'''+\ldots+m^{x-1}\times YP^{x-1}+m^x\times YP^x$
$=m\times YP-m'\times Yp'-m''\times Yp''-m'''\times Yp'''-m^{iv}\times Yp^{iv}-\ldots-m^{x-1}\times Yp^{x-1}+m^x\times YP^x.$
$+m'\times h'+m''\times h''+m'''\times h'''+m^{iv}\times h^{iv}+\ldots+m^{x-1}\times h^{x-1}\quad=S.$

Or, l'espace $m'\times h'+m''\times h''+m'''\times h'''+m^{iv}\times h^{iv}+\ldots+m^{x-1}\times h^{x-1}$ est donné de grandeur; donc, l'espace

$m\times YP-m'\times Yp'-m''\times Yp''-m'''\times Yp'''-m^{iv}\times Yp^{iv}-\ldots-m^{x-1}\times Yp^{x-1}+m^x\times Yp^x$

est aussi donné de grandeur; donc, le cas du polygone est réduit à quelqu'un des cas relatifs aux droites qui partent d'un même point.

Construction. Par un des sommets du polygone soient menées des droites parallèles aux côtés non adjacens à ce sommet. Sur un des côtés de ce polygone adjacent à ce sommet, sur les droites parallèles aux côtés opposés, et sur le prolongement de l'autre côté adjacent à ce sommet, soient portées des droites respectivement égales aux droites données de grandeur en tournant toujours dans un même sens. Soit cherché le centre Z des moyennes distances des extrémités de ces droites.

Si le centre Z convient avec le point B, le lieu est indéterminé. Cela a lieu en particulier lorsque les droites données de grandeur sont égales ou proportionnelles aux côtés correspondans de la figure. Alors, l'espace donné de grandeur est déterminé à être égal à la somme $m'\times h'+m''\times h''+m'''\times h'''+\ldots+m^{x-1}\times h^{x-1}$; et partant égal au double de la figure, dans la supposition que les droites données de grandeur sont respectivement égales aux côtés correspondans.

Que le centre Z des moyennes distances ne convienne pas avec le point B; et que cependant l'espace donné de grandeur soit égal à la somme $m'\times h'+m''\times h''\ldots m^{x-1}\times h^{x-1}$; le lieu cherché est la droite BZ qui joint le sommet B avec le centre Z.

Que l'espace donné de grandeur ne soit pas égal à la somme $m'\times h'+m''\times h''+m'''\times h'''+\ldots+m^{x-1}\times h^{x-1}$; soit prise la différence de cet espace et de cette somme; soit divisée cette différence par le nombre des côtés de la figure; et soit changée la partie obtenue en un rectangle ayant pour un de ses côtés la droite BZ. A la droite BZ soit élevée une perpendiculaire égale à l'autre côté de ce rectangle; et soit élevée cette perpendiculaire du côté où est située la figure relativement au sommet B, ou du côté opposé, suivant que l'espace donné de grandeur est plus grand ou plus petit que la somme $m'\times h'+m''\times h''+m'''\times h'''\ldots+m^{x-1}\times h^{x-1}$. Par le sommet de cette perpendiculaire soit menée à BZ une parallèle, elle sera le lieu cherché.

Comme le lieu cherché, s'il traverse le polygone, est situé en partie seulement dans l'intérieur du polygone, la somme proposée se convertit en quelque

Digitized by Google

différence en changeant les signes des perpendiculaires dont la direction est changée.

En regardant les points Y comme étant situés dans l'intérieur du polygone; si la question est proposée comme étant relative à quelque différence, la construction est toujours la même, en portant les droites données de grandeur correspondantes aux termes à soustraire, dans un sens opposé à celui selon lequel elles auroient été portées suivant la première supposition; et en changeant dans la somme $m' \times h' + m'' \times h'' + \ldots + m^{x-1} \times h^{x-1}$, les signes des termes dont le premier facteur a changé de signe.

Au moyen de cette conception, on peut toujours ramener à la supposition que les points Y sont situés en dedans du polygone, les différentes suppositions qu'on peut faire sur la position de ce point dans les différentes régions dans lesquelles le plan est partagé par les côtés du polygone et par leurs prolongemens; en ayant égard aux changemens de signes de l'un ou de l'autre, ou de chacun des facteurs des termes qui composent la somme proposée.

Corollaire. Porisme. Une figure rectiligne étant donnée de grandeur et de position, et des droites en nombre égal à celui de ses côtés étant données de grandeur, de manière que toutes ces droites ne soient pas entr'elles comme les côtés correspondans de la figure : on peut déterminer en même tems la position d'une droite et la grandeur d'une droite, de manière qu'on ait la proposition suivante.

D'un point du plan soient abaissées des perpendiculaires sur les côtés de la figure et sur la droite à déterminer de position; la somme des rectangles des premières perpendiculaires (prises dans une direction déterminée) par les droites correspondantes données de grandeur, diffère d'un espace donné, du rectangle de la perpendiculaire abaissée sur la droite à déterminer de position par la droite à déterminer de grandeur.

Application. Soit un système de droites données de position sur un plan, et soient des droites correspondantes données de grandeur. Soit un second système de droites données de position sur le même plan, et soient des droites correspondantes données de grandeur. D'un même point soient abaissées des perpendiculaires sur toutes ces droites; et soient pris les rectangles de ces perpendiculaires par les droites correspondantes données de grandeur. Que les sommes de ces rectangles, correspondantes aux deux systèmes (altérées par addition ou par soustraction d'espaces donnés de grandeur) soient entr'elles dans un rapport donné. Le lieu des points desquels ces perpendiculaires sont menées (s'il est déterminé) est une ligne droite.

Scholie.

Scholie. Le lieu que je viens de développer dans les deux derniers paragraphes est traité par SIMSON, d'une manière qui m'a paru beaucoup trop longue et incomplette. Il procède successivement du cas d'un certain nombre de droites données de position, au cas où le nombre des droites augmente d'une unité, et son procédé ne paroît donner lieu ni à une construction générale, ni à des propriétés des figures rectilignes, aussi remarquables que celles auxquelles mon procédé m'a conduit. Nous verrons dans la suite que la marche que j'ai suivie s'applique avec succès aux étendues situées dans des plans différens. J'ai déjà eu occasion de publier mon procédé dans mon ouvrage sur la Polygonométrie : voyez aussi la traduction allemande des lieux plans d'APOLLONIUS par CAMERER.

§ 37.

Problème. Soient deux points donnés de position. On demande le lieu des points desquels menant des droites à ces points donnés, la différence de leurs carrés soit égale à un espace donné de grandeur.

Soient A et A′ deux points donnés de position; on demande le lieu des points Y desquels menant des droites AY, A′Y, aux points donnés A et A′, la différence $AY^2 - A'Y^2$ soit égale à un espace S donné de grandeur. FIG. 25.

Analyse. Soit YX perpendiculaire à AA′, et soit AA′ coupée en deux parties égales au point C.

$$AY^2 = AX^2 + XY^2$$
$$A'Y^2 = A'X^2 + XY^2$$
$$AY^2 - A'Y^2 = AX^2 - A'X^2 = (AX + A'X)(AX - AX') = AA' \times 2CX = 4AC \times CX.$$

Donc le rectangle $4AC \times CX$ est donné de grandeur, mais la droite 4AC est donnée de grandeur, donc la droite CX est aussi donnée de grandeur, le point X est donné de position, et la perpendiculaire YX est aussi donnée de position.

Construction. Soit AA′ coupée en deux parties égales au point C. Soit converti l'espace donné de grandeur en un rectangle ayant $4AC = 2AA'$ pour un de ses côtés; et soit porté l'autre côté sur CA′ en CX. Du point X soit élevée à AA′ une perpendiculaire; elle est le lieu cherché.

Démonstr. $S = 4AC \times CX = AX^2 - A'X^2 = (AY^2 - XY^2) - (A'Y^2 - XY^2) = AY^2 - A'Y^2$.

Remarque 1.re Lorsque l'espace donné est zéro, ou lorsque les droites AY et A′Y doivent être égales entr'elles; la droite CX est zéro, et le lieu des points Y est la perpendiculaire à AA′, élevée depuis son milieu C.

Remarque 2.e *Porisme.* Soit un point donné de position, soit une droite donnée de position, et soit un espace donné de grandeur; on peut déterminer

la position d'un autre point, de manière que menant des droites d'un point de la droite donnée de position au point donné et au point à déterminer, la différence des carrés de ces droites soit égale à l'espace donné.

Pour cela; du point donné A soit abaissée sur la droite donnée de position une perpendiculaire AX. Du carré de AX soit retranché l'espace donné; et soit prolongée AX en A' d'une quantité A'X égale au côté du carré égal à la différence; le point A' est le point cherché. Si l'espace donné doit être l'excès du carré de A'Y sur le carré de AY; ou l'excès du carré de A'X sur le carré de AX, le carré de A'X est égal à la somme du carré de AX et de l'espace donné.

Comme la ligne XA' peut être portée sur AX de part et d'autre du point X, il y a deux points A' qui satisfont à la question.

Première application. Soit un cercle donné de grandeur et de position, et soit un point donné de position en dedans de ce cercle. Par ce point soit menée une droite quelconque qui coupe la circonférence. Sur cette droite soit prise depuis le point donné une droite telle, que son carré soit égal au rectangle des distances de son extrémité aux points où elle rencontre la circonférence; on demande le lieu de cette extrémité.

Fig. 24. Soit C le centre d'un cercle dont le rayon est r. Soit P un point donné en dedans de ce cercle. Par P soit menée une droite qui rencontre la circonférence en X et en X'; soit $PY^2 = XY \times YX'$; on demande le lieu des points Y.

Analyse. $XY \times YX' = CY^2 - r^2$; donc, $PY^2 = CY^2 - r^2$; et $CY^2 - PY^2 = r^2$; donc, le lieu des points Y est une ligne droite.

Il en est de même lorsque le carré et le rectangle proposé, au lieu d'être égaux entr'eux, doivent différer l'un de l'autre d'un espace donné de grandeur.

Que le point Y soit pris en dedans du cercle donné, et que la somme du carré de PY et du rectangle $XY \times YX'$ soit donnée de grandeur, le lieu des points Y est encore une ligne droite.

En effet; alors $XY \times YX' = r^2 - CY^2$; et partant,
$XY \times YX' + PY^2 = r^2 - CY^2 + PY^2 = r^2 - (CY^2 - PY^2)$; partant, cette somme étant donnée de grandeur, l'espace $CY^2 - PY^2$ est aussi donné de grandeur; donc le lieu des points Y est une ligne droite.

Seconde application. Soient deux cercles donnés de grandeur et de position; on demande le lieu des points de chacun desquels menant des tangentes à ces cercles elles soient égales entr'elles.

Soient C et C' les centres des deux cercles, et soient R et R' leurs rayons. Les carrés des tangentes à ces cercles menées d'un même point Y sont

Digitized by Google

CY^2-R^2 et $C'Y^2-R'^2$ respectivement ; et la différence des carrés de ces tangentes est $CY^2-C'Y^2-(R^2-R'^2)$. Partant, si ces tangentes doivent être égales entr'elles $CY^2-C'Y^2=R^2-R'^2$; et le lieu des points Y est une ligne droite. Il en est de même pour le cas où les carrés des tangentes au lieu d'être égaux entr'eux doivent différer l'un de l'autre d'un espace S donné de grandeur.

Troisième application. Soit P un point donné sur le plan d'un cercle, dont le centre est C et le rayon R. Du point P soit menée une droite quelconque PX à la circonférence du cercle. Sur PX comme base soit décrit un triangle isoscèle PXY, dont un des côtés soit sur la tangente au cercle menée du point X; on demande le lieu des sommets Y de ce triangle. FIG. 25.

On doit avoir $XY^2=PY^2$. Mais $XY^2=CY^2-R^2$; donc, $CY^2-XY^2=R^2$; donc, le lieu des points Y est une ligne droite. Le lieu des points Y est encore une ligne droite, lorsque les carrés des droites XY et PY au lieu d'être égaux entr'eux diffèrent l'un de l'autre d'un espace *S* donné de grandeur.

Quatrième application. On demande le lieu des sommets des triangles dont la base est donnée de grandeur et de position, et dans lesquels la différence des carrés des côtés est égale au rectangle de la hauteur par une droite donnée de grandeur 2l.

Puisque $AY^2-A'Y^2=4AC\times CX=2AA'\times CX$; et $AY^2-A'Y^2=2XY\times l$; $AA'\times CX=XY\times l$; et partant, $CX:XY=l:AA'$. Donc, le lieu des points Y est une droite donnée de position. FIG. 23.

§ 38.

Problème. Soient deux points donnés de position ; on demande le lieu des points de chacun desquels menant des droites aux points donnés, la somme de leurs carrés est égale à un espace $2S$ donné de grandeur.

Soient A et A' deux points donnés ; on demande le lieu des points Y de chacun desquels menant les droites AY et A'Y, la somme de leurs carrés soit égale à l'espace $2S$ donné de grandeur. FIG. 27.

Analyse. Soit AA' coupée en deux parties égales au point C ; et soit YX perpendiculaire à AA'.

$AY^2=AC^2+CY^2+2AC\times CX$

$A'Y^2=A'C^2+CY^2-2A'C\times CX$. Mais $AC=A'C$; donc,

$AY^2+A'Y^2=2AC^2+2CY^2$; et $CY^2=S-AC^2$. Donc, la droite CY est donnée de grandeur ; mais le point C est donné de position, donc les points Y sont à la circonférence d'un cercle donné.

Construction. Soit AA' coupée en C en deux parties égales au point C.

De la moitié de l'espace donné soit retranché le carré de AC. Du point C comme centre avec un rayon égal au côté du carré égal au reste soit décrite une circonférence de cercle, elle sera le lieu cherché des points Y.

Démonstration. $AY^2+A'Y^2=2AC^2+2CY^2$; mais, $CY^2=S-AC^2$ (constr.) et partant, $S=AC^2+CY^2$; donc, $AY^2+A'Y^2=2S$.

Remarque 1.re Lorsque l'espace donné est égal à $4AC^2$ ou AA'^2; $CY^2=AC^2$; et partant, le lieu des points Y est la circonférence du cercle dont AA' est le diamètre.

Remarque 2.e Puisque $AY^2+A'Y^2=2AC^2+2CY^2$; la plus petite valeur de l'espace proposé est $2AC^2$; la somme des carrés répondant à tout point Y différent du point C, surpasse la somme des carrés répondant au point C, de deux fois le carré de la distance de ces deux points.

Remarque 3.e *Porisme.* Soit un cercle donné de grandeur et de position, et soit un point donné de position (différent du centre de ce cercle). On peut déterminer en même tems la position d'un second point et la grandeur d'un espace, de manière que menant des droites à ces deux points depuis un point quelconque de la circonférence du cercle donné, la somme des carrés de ces deux droites soit égale à l'espace à assigner.

Le point à déterminer de position est sur la droite qui joint le point donné avec le centre du cercle, de manière que ces deux points sont également éloignés du centre, et l'espace à assigner est double de la somme du carré du rayon et du carré de la distance du point donné au centre.

Première application. Soient deux cercles donnés de grandeur et de position. La circonférence d'un cercle est le lieu des points de chacun desquels menant des tangentes à ces cercles la somme de leurs carrés est d'une grandeur constante.

Seconde application. Soit un parallélogramme donné de grandeur et d'espèce; d'un point quelconque soient menées des droites aux sommets de ce parallélogramme. La somme des carrés de ces quatre droites est égale à la somme du double de la somme des carrés des deux demi-diagonales, et de quatre fois le carré de la droite menée de ce point au centre du parallélogramme; et partant, cette somme surpasse la somme des carrés des droites menées du centre du parallélogramme à ses sommets, de quatre fois le carré de la droite menée du centre du parallélogramme au même point.

Troisième application. En général, soit une figure ayant un centre de figure. D'un point quelconque soient menées des droites aux sommets de cette figure et à ce centre. La somme des carrés des droites menées aux sommets est égale à la

la somme des carrés des droites menées de ce centre aux sommets de la figure, et du carré de la distance de ce point au centre pris autant de fois qu'il y a de sommets.

Quatrième application. En particulier, d'un point quelconque soient menées des droites à tous les sommets d'une figure régulière d'un nombre pair de côtés. La somme des carrés de ces droites est égale à la somme du carré du rayon du cercle circonscrit au polygone, et du carré de la distance de ce point au centre, prise autant de fois que le polygone a de sommets.

Cette application s'étend aussi aux polygones dont le nombre des côtés est impair.

Soit P un polygone d'un nombre impair n de côtés, que le rayon du cercle circonscrit soit r. Soit conçu le polygone régulier P' d'un nombre double de côtés $2n$, tel que les sommets du premier polygone soient aux milieux des côtés alternatifs du second; et partant, que les autres côtés alternatifs du second polygone soient parallèles aux côtés du premier. Soit r' le rayon du cercle circonscrit au second polygone; soit a' son demi-côté; soit C le centre commun des deux polygones.

Pour abréger; soit $f.\ YA^2$ la somme des carrés des droites menées d'un point Y aux sommets du premier polygone; et soit $f.\ YA'^2$ la somme des carrés des droites menées du même point aux sommets du second polygone.

Par une conséquence immédiate de la proposition principale

$f.\ YA'^2 = 2\,(f.\ YA^2 + na'^2)$; mais $f.\ YA'^2 = 2n\,(r'^2 + CY^2)$; donc,

$f.\ YA^2 + na'^2 = n(r'^2 + CY^2)$; et $f.\ YA^2 = n\,(CY^2 + r'^2 - a'^2) = n\,(CY^2 + r^2)$.

En particulier; soit un polygone régulier inscrit à un cercle, d'un point quelconque de la circonférence de ce cercle soient menées des droites à ses sommets; la somme des carrés de ces droites est égale au double du carré du rayon pris autant de fois que le polygone a de côtés.

Scholie. Cette dernière propriété des polygones réguliers peut être obtenue d'une manière immédiate, comme il suit:

Du point Y pris sur la circonférence du cercle circonscrit à un polygone régulier soit menée à ce cercle une tangente; et de chacun des sommets du polygone soit abaissée sur cette tangente une perpendiculaire. Le carré de la droite menée à l'un des sommets, est égale au rectangle du diamètre par la perpendiculaire abaissée de ce sommet sur la tangente; partant, la somme des carrés des droites menées à tous les sommets, est égale au rectangle du diamètre par la somme des perpendiculaires abaissées sur la tangente depuis tous les sommets; mais (§ 7.) cette somme est égale au rayon pris autant de fois qu'il

y a de sommets; donc, la somme des carrés des droites menées à tous les sommets est égale au rectangle du diamètre par le rayon pris autant de fois qu'il y a de sommets; et partant, au double du carré du rayon pris autant de fois qu'il y a de sommets.

Symboliquement. Le point Y étant sur la circonférence du cercle dont le rayon est r; *f.* $YA^2=2nr^2$.

Cinquième application. Soit C le centre d'un cercle donné dont le rayon est r. Soit P un point donné sur le plan de ce cercle hors de sa circonférence. Par ce point soit menée une droite PY de manière que Y est hors du cercle. Par Y soit menée une droite qui rencontre la circonférence en X et en X'. Soit donnée la somme du carré de PY et du rectangle $XY\times YX'$; le lieu des points Y est une circonférence de cercle.

En effet; $XY\times YX'=CY^2-r^2$. Donc, $PY^2+CY^2-r^2$ est donné de grandeur. Donc, le lieu des points Y est la circonférence d'un cercle.

Que le point Y soit en dedans du cercle; et que la différence du carré de PY et du rectangle $XY\times YX'$ soit donnée de grandeur, le lieu des points Y est encore une circonférence de cercle.

En effet; $XY\times YX'=r^2-CY^2$.
Donc, $XY\times YX'-PY^2=r^2-(CY^2+PY^2)$
Ou, $PY^2-XY\times YX'=CY^2+PY^2-r^2$.

Donc, dans l'un et l'autre cas, le lieu des points Y est la circonférence d'un cercle.

Sixième application. Soient deux cercles donnés de grandeur et de position. D'un même point soient menées des tangentes à ces cercles; et que la somme des carrés de ces tangentes soit donnée de grandeur. Le lieu des points desquels ces tangentes sont menées, est la circonférence d'un cercle.

Soient C et C' les centres de deux cercles dont les rayons sont r et r'; d'un même point Y soient menées à ces cercles des tangentes YT, YT'; soit donnée la somme des carrés de ces tangentes; j'affirme que le lieu des points Y est la circonférence d'un cercle.

En effet; $YT^2=CY^2-r^2$
$YT'^2=C'Y^2-r'^2$.
$YT^2+YT'^2=CY^2+C'Y^2-(r^2+r'^2)$.

Donc, la somme des carrés de CY et de C'Y est donnée de grandeur; donc, le lieu des points Y est la circonférence d'un cercle donné.

§ 39.

Problème. Soient deux points donnés de position, et soient deux exposans de rapports donnés de grandeur. On demande le lieu des points de chacun desquels menant des droites aux points donnés, la somme des espaces qui ont aux carrés de ces droites les rapports dont les exposans sont donnés soit donnée de grandeur.

Soient A et A′ deux points donnés. Soient m et m' deux exposans donnés de rapports. D'un point Y soient menées des droites YA, YA′, aux points donnés; et que la somme $m \times YA^2 + m' \times YA'^2$ soit égale à un espace donné de grandeur; on demande le lieu des points Y. FIG. 26.

Analyse. Soit Z le centre des moyennes distances des points A et A′ pour les coefficiens m et m' respectivement; et partant, soit $m \times AZ = m' \times A'Z$.

$AY^2 = AZ^2 + ZY^2 - 2AZ \times ZY \cos. AZY.$

$A'Y^2 = A'Z^2 + ZY^2 - 2A'Z \times ZY \cos. A'ZY.$

$= A'Z^2 + ZY^2 + 2A'Z \times ZY \cos. AZY.$

$m \times AY^2 = m \times AZ^2 + m \times ZY^2 - 2m \times AZ \times ZY \cos. AZY$

$m' \times A'Y^2 = m' \times A'Z^2 + m' \times ZY^2 + 2m' \times A'Z \times ZY \cos. AZY.$

$m + AY^2 + m' \times A'Y^2 = m \times AZ^2 + m' \times A'Z^2 + (m + m') ZY^2.$

Or, le point Z est donné de position; et partant, la somme $m \times AZ^2 + m' \times A'Z^2$ est donnée de grandeur; mais la somme $m \times AY^2 + m' \times A'Y^2$ est égale à l'espace S donné de grandeur; donc aussi l'espace $(m+m')\ ZY^2$ est donné de grandeur; et partant, la droite ZY est donnée de grandeur; mais le point Z est donné de position, donc le lieu des points Y est une circonférence de cercle donnée.

Construction. Soit Z le centre des moyennes distances des points A et A′ pour les coefficiens m et m' respectivement. Soit prise la somme des espaces qui sont aux carrés des droites ZA et ZA′ dans des rapports dont les exposans sont m et m' respectivement. De l'espace S donné de grandeur, soit retranchée cette somme. Que le reste soit égal à un espace qui est au carré d'une droite L dans un rapport dont l'exposant est $m + m'$. Du point Z comme centre avec le rayon L soit décrite une circonférence de cercle, elle sera le lieu cherché des points Y.

Démonstration. Par construction; $(m+m')\ ZY^2 = S - (m \times AZ^2 + m' \times A'Z^2)$; ou, $m \times AZ^2 + m' \times A'Z^2 + (m+m')ZY^2 = S$.

Mais, $m \times AY^2 = m\,(AZ^2 + ZY^2 - 2AZ \times ZY \cos. AZY)$.

$m' \times A'Y^2 = m'(A'Z^2 + ZY^2 + 2A'Z \times ZY \cos. AZY)$.

Donc, $m \times AY^2 + m' \times A'Y^2 = m \times AZ^2 + m' \times A'Z^2 + (m+m')ZY^2 = S$.

Remarque 1.re Le centre Z des moyennes distances des points A et A′ pour les coefficiens m et m' est le point auquel répond la plus petite somme des

Digitized by Google

espaces qui ont aux carrés des distances à ces points les rapports dont les exposans sont m et m'.

La valeur de cette plus petite somme est $\frac{m\,m'}{m+m'}\,AA'^2$.

La somme des espaces répondant à tout autre point Y, surpasse la somme des espaces répondant au point Z, de l'espace $(m+m')\,ZY^2$ ou de l'espace qui a au carré de ZY le rapport dont l'exposant est $m+m'$.

Remarque 2.e *Porisme.* Soit un cercle donné de grandeur et de position, soit un point (qui n'est pas son centre et qui n'est pas sur sa circonférence) aussi donné de position, et soient deux exposans de rapports donnés de grandeur. On peut déterminer en même tems la position d'un autre point et la grandeur d'un espace, de manière que menant des droites d'un point de la circonférence au point donné et au point à déterminer, la somme des espaces qui ont aux carrés de ces droites les rapports dont les exposans sont donnés, soit égale à l'espace à déterminer de grandeur.

Soit Z le centre du cercle donné et r son rayon; soit A le point donné, soient m et m', les exposans donnés. Le point A' se détermine par l'équation

$$m\times ZA=m'\times ZA';\ ZA'=\frac{m}{m'}\,ZA.$$

$$S=(m+m')\,r^2+m\times ZA^2+m'\times ZA'^2=(m+m')\,r^2+m\times ZA^2+\frac{m\,m}{m'}\,ZA^2$$

$$=(m+m')\,r^2+(m+m')\frac{m}{m'}\,ZA^2=(m+m')\left(r^2+\frac{m}{m'}\,ZA^2\right).$$

§ 40.

Problème. Soient deux points donnés de position; et soient deux exposans de rapports inégaux entr'eux, donnés de grandeur. On demande le lieu des points de chacun desquels menant des droites aux deux points donnés, la différence des espaces, qui ont aux carrés des droites menées aux points donnés les rapports donnés, soit égale à un espace donné.

Fig. 27. Soient A et A' deux points donnés de position; soient m et m' deux exposans donnés de rapports inégaux entr'eux; et soit un espace S donné de grandeur; on demande le lieu des points Y, tels que $m\times YA^2-m'\times YA'^2=S$.

Premier cas. Soit $m<m'$. Soit cherché l'excentre Z des moyennes distances des points A et A', de manière qu'on ait l'équation $m\times AZ=m'\times A'Z$; le point Z étant situé sur AA' prolongée de A en A'.

$m\times$

$m \times YA^2 = m(AZ^2 + ZY^2 - 2AZ \times ZY \cos. AZY)$
$m' \times YA'^2 = m'(A'Z^2 + ZY^2 - 2A'Z \times ZY \cos. A'ZY)$. De là,

$m \times YA^2 - m' \times YA'^2 = m \times AZ^2 - m' \times A'Z^2 - ZY^2 (m' - m). = S.$
Donc, $ZY^2 (m' - m) = m \times AZ^2 - m' \times A'Z^2 - S.$

Or, les espaces $m \times AZ^2$ et $m' \times A'Z^2$ sont l'un et l'autre donnés de grandeur; donc, leur différence est donnée, et partant aussi $m \times AZ^2 - m' \times A'Z^2 - S$ est donnée de grandeur; donc aussi ZY^2 est donné de grandeur. Mais le point Z est donné de position; donc, le point Y est à la circonférence d'un cercle donné.

Construction. Soit cherché l'excentre des moyennes distances des points A et A' pour les coefficiens m et m', par l'équation $m \times AZ = m' \times A'Z$. De la différence $m \times AZ^2 - m' \times A'Z^2$, soit retranché l'espace S donné de grandeur; soit convertie la différence en un espace qui ait au carré d'une droite L un rapport dont l'exposant est $m' - m$; puis du point Z comme centre avec le rayon L, soit décrite une circonférence de cercle. Elle sera le lieu cherché des points Y.

Démonstration. Par construction $(m' - m) ZY^2 = m \times AZ^2 - m' \times A'Z^2 - S.$

Mais, $m \times AY^2 = m(AZ^2 + ZY^2 - 2AZ \times ZY \cos. AZY)$
$m' \times A'Y^2 = m'(A'Z^2 + ZY^2 - 2A'Z \times ZY \cos. A'ZY).$

Donc, $m \times AY^2 - m' \times A'Y^2 = m \times AZ^2 - m' \times A'Z^2 - ZY^2 (m' - m).$

Second cas. Soit $m > m'$; l'excentre Z des moyennes distances des points A et A' est sur AA' prolongée dans la direction A'A, et on a de même
$m \times AY^2 - m' \times A'Y^2 = m \times AZ^2 - m' \times A'Z^2 + (m - m') ZY^2 = S.$
et $ZY^2 (m - m') = S + (m' \times A'Z^2 - m \times AZ^2).$

Or, l'espace S est supposé donné de grandeur, et l'espace $m' \times A'Z^2 - m \times AZ^2$ est aussi donné de grandeur; donc, $ZY^2 (m - m')$ est aussi donné de grandeur; mais le point Z est donné de position; donc, le point Y est à la circonférence d'un cercle donné.

Construction. Soit Z l'excentre des moyennes distances des points A et A' pour les coefficiens m et m'. Soit prise la différence des espaces qui ont aux carrés des droites A'Z et AZ des rapports dont les exposans sont m' et m. Soit prise la somme de l'espace donné S et de cette différence; que cette somme soit convertie en un espace qui ait au carré d'une droite L le rapport dont l'exposant est $m - m'$; du point Z comme centre avec le rayon L, soit décrite une circonférence de cercle, elle sera le lieu des points Y.

Digitized by Google

Démonstration. $m \times AY^2 = m(AZ^2 - 2AZ \times ZY \cos. AZY + ZY^2)$

$m' \times A'Y^2 = m'(A'Z^2 - 2A'Z \times ZY \cos. A'ZY + ZY^2)$.

$m \times AY^2 - m' \times A'Y^2 = m \times AZ^2 - m' \times A'Z^2 + ZY^2(m - m') = S$.

Remarque 1re. Dans le premier cas où $m < m'$; $m \times AZ^2 - m' \times A'Z^2 = \frac{mm'}{m'-m} AA'^2$ (§ 13); l'espace S donné de grandeur ne doit pas être plus grand que cette quantité; partant, l'excentre Z des moyennes distances est le point auquel répond la plus grande différence des espaces $m \times AY^2 - m' \times A'Y^2$; cette plus grande différence est $\frac{mm'}{m'-m} AA'^2$; et elle diffère de la différence répondante à tout autre point Y de l'espace $(m'-m)\,ZY^2$; ou de l'espace qui est au carré de la distance du point Y à l'excentre Z dans un rapport dont l'exposant est $m'-m$.

Remarque 2.e Dans le second cas dans lequel $m > m'$;

$m \times AZ^2 - m' \times A'Z^2 = \frac{mm'}{m-m'} AA'^2$; et $m \times AY^2 - m' \times A'Y^2 = \frac{mm'}{m-m'} AA'^2 + ZY^2(m-m')$.

La plus petite différence $m \times AY^2 - m' \times A'Y^2$, répond au cas où Y coïncide avec Z; et partant, la plus petite valeur de la différence proposée répond à l'excentre des moyennes distances des points A et A' pour les coefficiens m et m'; et la valeur correspondante à tout autre point Y, surpasse la valeur correspondante à l'excentre Z, de l'espace $(m-m')\,ZY^2$ qui a au carré de YZ le rapport dont l'exposant est $m-m'$.

Remarque 3.e Le cas de l'égalité des exposans m et m' se distingue par ses conséquences du cas de leur inégalité. Dans le cas d'inégalité, le lieu proposé est toujours une circonférence de cercle; dans le cas d'égalité, ce lieu est une ligne droite (§ 57). Il est intéressant de poursuivre la manière dont les conséquences de ces deux suppositions opposées se rapprochent les unes des autres.

Soit par exemple $m > m'$; et partant, que l'ordre des points A, A', Z, soit ZAA'; on a $AZ = \frac{m'}{m-m'} AA'$, $A'Z = \frac{m}{m-m'} AA'$. Lorsqu'on applique ces formules à la supposition $m = m'$, on obtient $AZ = \frac{1}{0} AA'$, $A'Z = \frac{1}{0} AA'$; partant, il est impossible de déterminer le point Z, et les lignes impossibles à déterminer AZ et A'Z sont dites l'une et l'autre infinies. Dans la même supposition, la différence $m \times AZ^2 - m' \times A'Z^2$ qui est $\frac{mm'}{m-m'} AA'^2$ devient aussi infinie.

L'espace S étant fini et donné de grandeur, l'excès de l'espace infini

$m \times AZ^2 - m'A'Z^2$ sur cet espace fini S, est aussi infini. Or, l'expression du carré du rayon ZY est $\frac{mm'}{(m-m')^2} AA'^2 - \frac{1}{m-m'} S = \frac{1}{(m-m')^2} (mm'AA'^2 - (m-m')S)$; donc, dans la supposition $m=m'$, ce rayon est aussi infini.

Soient B et B' les points dans lesquels la circonférence du cercle rencontre la droite AA'.

$$BZ = \frac{1}{m-m'} \sqrt{(mm'AA'^2 - (m-m')S)}$$

$$B'Z = -\frac{1}{m-m'} \sqrt{(mm'AA'^2 - (m-m')S)}$$

$$\text{Or, } A'Z = \frac{m}{m-m'} AA'.$$

$$A'Z - BZ = A'B = \frac{1}{m-m'} (mAA' - \sqrt{(mm'AA'^2 - (m-m')S)}$$

$$= \frac{1}{m-m'} \times \frac{mmAA'^2 - mm'AA'^2 + (m-m')S}{mAA' + \sqrt{(mm'AA'^2 - (m-m')S)}}$$

$$= \frac{mAA'^2 + S}{mAA' + \sqrt{(mm'AA'^2 - (m-m')S)}}$$

Cette distance A'B est finie; et sa limite correspondante à la supposition $m = m'$, est $\frac{AA'^2 + S}{2AA'} = \frac{1}{2} AA' + \frac{S}{2AA'}$ (conformément au § 37).

La distance A'B' est $\frac{mAA' + \sqrt{(mm'AA'^2 - (m-m')S)}}{m-m'}$; et dans la supposition $m=m'$, cette distance devient infinie et indéterminable. Plus le rapport donné de m à m' (supposé d'inégalité) approche du rapport d'égalité, plus est grand le rayon du cercle dont la circonférence est le lieu cherché. Aussi long-tems que le rapport proposé est conforme à cette supposition fondamentale, le lieu proposé ne cesse pas d'être une circonférence de cercle. Mais, lorsque la supposition d'inégalité est remplacée par la supposition contraire; il n'y a plus lieu à la circonférence du cercle, et elle est remplacée par une ligne droite. Si on persiste à parler encore de circonférence dans le cas où il n'y a plus lieu à en parler; on dira (avec quelques mathématiciens modernes qui conservent une relation entre les conséquences de deux suppositions opposées), qu'une ligne droite est une circonférence de cercle dont le rayon est infini; c'est-à-dire une circonférence de cercle dont on ne peut assigner ni la position du centre ni la grandeur du rayon; c'est-à-dire enfin une circonférence de cercle qui n'est pas une circonférence.

Remarque 4.° *Porisme.* Soit un cercle donné de grandeur et de position, soit un point donné de position (qui n'est pas le centre du cercle, et qui n'est pas sur sa circonférence), et soient deux exposans de rapports donnés et inégaux entr'eux; on peut déterminer en même tems la position d'un point et la grandeur d'un espace, de manière que la différence des espaces qui ont les rapports donnés aux carrés des droites menées d'un point de la circonférence donnée au point donné et au point à déterminer, soit égale à l'espace à déterminer.

§ 41.

Problème. Soient des points en nombre quelconque donnés de position sur un plan. Soient des exposans correspondans de rapports donnés de grandeur; on demande le lieu des points de chacun desquels menant des droites aux points donnés, la somme des espaces qui ont aux carrés de ces droites les rapports dont les exposans sont donnés, soit donnée de grandeur.

Je crois devoir introduire à la proposition générale par le développement de l'exemple particulier de trois points.

Fig. 28. Soient A, A′, A″, trois points donnés de position; soient m, m′, m″, trois exposans correspondans de rapports donnés de grandeur. On demande le lieu des points Y de chacun desquels menant des droites YA, YA′, YA″ aux points donnés, la somme $m\times YA^2+m'\times YA'^2+m''\times YA''^2$, soit égale à l'espace S donné de grandeur.

Analyse. Soit Z′ le centre des moyennes distances des points A et A′ pour les coefficiens correspondans *m* et *m′*, on a
$m\times AY^2+m'\times A'Y^2=m\times AZ'^2+m'\times A'Z'^2+(m+m')YZ'^2$; et partant,
$m\times AY^2+m'\times A'Y^2+m''\times A''Y^2=m\times AZ'^2+m'\times A'Z'^2+m''\times A''Y^2+(m+m')YZ'^2$.
Soit Z le centre des moyennes distances des points A″ et Z′ pour les coefficiens m″ et m+m′, et partant le centre des moyennes distances des points A, A′, A″, pour les coefficiens m, m′, m″; on a
$m''\times YA''^2+(m+m')YZ'^2=m''\times A''Z^2+(m+m')ZZ'^2+(m+m'+m'')YZ^2$; partant, $m\times AY^2+m'\times A'Y^2+m''\times A''Y^2$
$=m\times AZ'^2+m'\times A'Z'^2+m''\times A''Z^2+(m+m')ZZ'^2+(m+m'+m'')YZ^2$.
Or, le premier membre de cette équation est supposé donné de grandeur, et les quatre premiers termes du second membre sont aussi donnés de grandeur; donc, le cinquième terme du second membre $(m+m'+m'')YZ^2$ est aussi donné de grandeur; et partant, YZ est donnée de grandeur; mais le point Z est donné de position; donc, le point Y est à la circonférence d'un cercle dont on connoît le centre Z et le rayon ZY.

Puisque

Puisque Z' est le centre des moyennes distances des points A et A′ pour les coefficiens m et m′, et que Z est différent de Z' ;
$m\times AZ^2+m'\times A'Z^2=m\times AZ'^2+m'\times A'Z'^2+(m+m')\,ZZ'^2$. Donc,
$m\times AY^2+m'\times A'Y^2+m''\times A''Y^2=m\times AZ^2+m'\times A'Z^2+m''A''Z^2+(m+m'+m'')\,YZ^2$.
De là découle la construction suivante :

Construction. Soit cherché le centre des moyennes distances des points A, A′, A″, pour les coefficiens m, m′, m″. Soit prise la somme des espaces qui ont aux carrés des droites ZA, ZA′, ZA″, les rapports dont les exposans sont m, m′, m″, respectivement. De l'espace S donné de grandeur, soit retranchée cette somme. Soit converti le reste en un espace qui ait au carré d'une droite L le rapport dont l'exposant est $m+m'+m''$. Du point Z comme centre, avec le rayon L soit décrite une circonférence de cercle ; elle sera le lieu cherché des points Y.

Démonstration. Par construction,
$S=m\times AZ^2+m'\times A'Z^2+m''\times A''Z''^2+(m+m'+m'')\,YZ^2$.
Or, $m\times YA^2+m'\times YA'^2=m\times AZ'^2+m'\times A'Z'^2+(m+m')YZ'^2$.
Donc, $m\times YA^2+m'\times YA'^2+m''\times YA''^2=m\times AZ'^2+m'\times A'Z'^2+m''\times ZA''^2+(m+m')YZ'^2$.
Puisque Z est le centre des moyennes distances des points A″ et Z' pour les coefficiens m″ et $m+m'$; $m''\times YA''^2+(m+m')\,YZ'^2=m''A''Z^2+(m+m')Z'Z^2+(m+m'+m'')\,YZ^2$ (§ 39) ; et puisque Z est différent de Z',
$m\times AZ^2+m'\times A'Z^2=m\times AZ'^2+m'\times A'Z'^2+(m+m')\,ZZ'^2$.
Donc, $m\times YA^2+m'\times YA'^2+m''\times YA''^2=m\times AZ^2+m'\times A'Z^2+m''\times A''Z^2+(m+m'+m'')YZ^2=S$.

Corollaire. Le centre Z des moyennes distances des points A, A′, A″ pour les coefficiens m, m′, m″, est le point auquel répond la plus petite valeur de la somme des espaces qui ont aux carrés des droites menées d'un même point aux points A, A′, A″, des rapports dont les exposans sont ces coefficiens donnés ; la somme des espaces correspondans à tout autre point Y surpasse la somme des espaces correspondans au point Z, de l'espace dont le rapport au carré de YZ a pour exposant la somme $m+m'+m''$ des premiers exposans.

Il me paroît que cet exemple suffit pour exposer la proposition générale, sans employer une figure qu'il est aisé de suppléer.

Soient A, A′, A″, A‴ .... A^{x-1}, A^x, des points donnés de position ; et soient m, m′, m″, m‴.... m^{x-1}, m^x, des exposans donnés de rapports ; soit Z' le centre des moyennes distances de ces points pour les coefficiens correspondans donnés. Qu'il ait été prouvé que pour un point quelconque Y, on a l'équation, $f.\ m^xA^xY^2=f.\ m^xA^xZ'^2+Z'Y^2 f.\ m^x$.

Soit A^{x+1} un point de plus ; soit m^{x+1} un exposant correspondant donné,

et soit Z le centre des moyennes distances de tous les points. J'affirme qu'on a aussi l'équation $f.\ m^{x+1} A^{x+1} \overline{Y}^2 = f.\ m^{x+1} A^{x+1} Z^2 + ZY^2 f.\ m^{x+1}$.

En effet ; puisque $f.\ m^x A^x \overline{Y}^2 = f.\ m^x \times A^x Z'^2 + Z'Y^2 f.\ m^x$.

$$f.\ m^{x+1} A^{x+1} \overline{Y}^2 = f.\ m^x \times A^x Z'^2 + m^{x+1} \times A^{x+1} Y^2 + Z'Y^2 \times f.m^x.$$

Or, puisque Z est le centre des moyennes distances des points Z' et A^{x+1}, pour les coefficiens $f.\ m^x$ et m^{x+1}; $m^{x+1} \times A^{x+1} Y^2 + Z'Y^2\ f.\ m^x$

$= m^{x+1} \times ZA^{x+1}\overline{}^2 + ZY^2 f.\ m^{x+1}$;

donc, $f.\ m^{x+1} \times A^{x+1} \overline{Y}^2 = f.\ m^x \times A^x \overline{Z'}^2 + m^{x+1} \times A^{x+1} Z^2 + ZZ'^2 f.\ m^x + ZY^2 f.\ m^{x+1}$.

mais (par supposition), $f.\ m^x \times A^x \overline{Z'}^2 + ZZ'^2 f.\ m^x = f.\ m^x \times A^x \overline{Z}^2$;

donc, $f.\ m^{x+1} \times A^{x+1} Y^2 = f.\ m^x \times A^x \overline{Z}^2 + m^{x+1} \times A^{x+1} \overline{Z}^2 + ZY^2 f.\ m^{x+1}$.

$$= f.\ m^{x+1} A^{x+1} \overline{Z}^2 + ZY^2 f.\ m^{x+1}.$$

On a donc généralement la proposition suivante :

Soient des points en nombre quelconque donnés de position, et soient des exposans correspondans de rapports donnés : soit pris le centre des moyennes distances de tous ces points pour ces exposans pris comme coefficiens. D'un point quelconque soient menées des droites à tous les points donnés, et au centre des moyennes distances. Soit prise la somme des espaces qui ont aux carrés des droites menées de ce point aux points donnés les rapports dont les exposans sont donnés; et soit prise la somme des espaces qui ont les mêmes rapports aux carrés des distances des points donnés au centre de leurs moyennes distances. La première somme surpasse la seconde, de l'espace qui est au carré de la distance du même point au centre des moyennes distances dans un rapport dont l'exposant est la somme des exposans donnés.

Partant, le centre des moyennes distances d'un nombre quelconque de points donnés pour des coefficiens donnés, étant pris pour centre d'un cercle; d'un point pris sur la circonférence de ce cercle soient menées des droites à tous les points donnés; la somme des espaces qui ont aux carrés de ces droites des rapports dont les exposans sont les coefficiens donnés, est toujours la même; et partant, si cette somme est égale à un espace donné S on détermine le rayon R de ce cercle par l'équation $S = f.\ m^x \times A^x \overline{Z}^2 + R^2 f.\ m^x$.

$$= f.\frac{m^{x-1} m^x}{f.\ m^x} A^{x-1} \overline{A^x}^2 + R^2 f.\ m^x\ (\S\ 11).$$

Porisme correspondant au lieu proposé. Soient des points en nombre

quelconque donnés de position sur un plan. Soient des exposans correspondans de rapports donnés de grandeur ; soit aussi un exposant de plus donné. On peut déterminer en même tems la position d'un nouveau point correspondant à cet exposant, et la grandeur d'un espace ; de manière que la somme des espaces qui ont les rapports donnés aux carrés des droites menées d'un point de la circonférence aux points correspondans donnés et au point à déterminer, soit égale à l'espace à déterminer.

Pour cela, soit cherché le point tel que le centre du cercle donné est le centre des moyennes distances des points donnés et de ce point pour les coefficiens donnés ; ce point est le point cherché. L'espace cherché est la somme des espaces qui ont aux carrés des distances du centre du cercle donné à tous ces points, les rapports dont les exposans sont donnés, et de l'espace qui est au carré du rayon du cercle donné dans un rapport dont l'exposant est la somme des exposans donnés.

§ 42.

Problème. Soit un système de points donnés de position ; soient des exposans correspondans de rapports donnés ; d'un même point soient menées des droites à tous ces points, et soit prise la somme des espaces qui ont aux carrés des droites menées les rapports dont les exposans sont donnés.

Soit un autre système de points aussi donnés de position ; soient des exposans de rapports correspondans aussi donnés ; du même point soient menées des droites aux points de ce système, et soit prise la somme des espaces qui ont aux carrés des droites menées les rapports dont les exposans sont donnés.

Que la différence de ces deux sommes soit donnée de grandeur ; on demande le lieu du point duquel les droites sont menées.

Soient $A, A', A'', A''' \ldots A^n$, les points du premier système ; et soient $m, m', m'', m''' \ldots m^n$ les exposans correspondans des rapports donnés. Soient $B, B', B'', B''' \ldots B^n$ les points du second système, et soient $p, p', p'', p''' \ldots p^n$ les exposans correspondans. Soit Z le centre des moyennes distances des points du premier système pour les exposans correspondans ; et soit Z' le centre des moyennes distances des points du second système pour les exposans correspondans. Soit Y un point duquel on mène des droites à tous les points. On a les équations $f. m^n YA^{n-2} = f. m^n ZA^{n-2} + YZ^2 f. m^n$.

$$S. p^n YB^{n-2} = S. p^n Z'B^{n-2} + YZ'^2 f. p^n$$

$$\text{Donc, } f. m^n YA^{n-2} - f. p^n YB^{n-2} = f. m^n ZA^{n-2} - f. p^n Z'B^{n-2} + YZ^2 f. m^n - YZ'^2 f. p^n.$$

1.° Soit $f.\,m^x = f.\,p^n$; la différence $YZ^2 - YZ'^2$ est donnée de grandeur ; mais les points Z et Z′ sont donnés de position ; donc le lieu des points Y est une ligne droite.

Dans la supposition $f.\,m^x = f.\,p^n$, si les points Z et Z′ coïncident, le problème est indéterminé ; et la différence $f.\,m^x \times \overline{YA^x}^2 - f.\,p^n \times \overline{YB^n}^2$ est déterminée à être égale à la différence donnée $f.\,m^x \times \overline{ZA^x}^2 - f.\,p^n \times \overline{Z'B^n}^2$.

2.° Que les deux sommes $f.\,m^x$ et $f.\,p^n$ ne soient pas égales entr'elles ; le lieu proposé (s'il est possible) est une circonférence de cercle, conformément au § 40.

Scholie. Les propositions développées dans les derniers §§ 37 – 42, contiennent des propriétés bien remarquables du cercle et du centre des moyennes distances. Elles ont été connues des anciens, ainsi qu'il paroît par les collections mathématiques de PAPPUS. Elles ont été développées avec soin par SIMSON dans son ouvrage sur les lieux plans. Sans rendre le développement moins géométrique, j'ai cru pouvoir le présenter sous une forme plus symbolique et plus concise que l'a fait cet auteur.

Ce développement repose essentiellement sur la proposition suivante relative aux triangles.

Soit AA′Y un triangle, dans lequel on a mené une droite YZ du sommet à un des points de sa base. Soient pris les espaces qui sont aux carrés des côtés AY, A′Y, comme les segmens opposés A′Z et AZ respectivement sont à la base AA′. La somme de ces deux espaces est égale à la somme du rectangle des segmens de la base et du carré de la droite YZ menée au point Z de la base.

FIG. 26. En effet, soit YX perpendiculaire à la base

$$AY^2 = AZ^2 + ZY^2 - 2AZ \times ZX ;$$

$$A'Y^2 = A'Z^2 + ZY^2 + 2A'Z \times ZX$$

$$AY^2 \times \frac{A'Z}{AA'} = AZ^2 \times \frac{A'Z}{AA'} + ZY^2 \times \frac{A'Z}{AA'} - 2AZ \times ZX \times \frac{A'Z}{AA'}$$

$$A'Y^2 \times \frac{AZ}{AA'} = A'Z^2 \times \frac{AZ}{AA'} + ZY^2 \times \frac{AZ}{AA'} + 2A'Z \times ZX \times \frac{AZ}{AA'}$$

$$AY^2 \times \frac{A'Z}{AA'} + A'Y^2 \times \frac{AZ}{AA'} = AZ \times A'Z + ZY^2.$$

FIG. 27. Que le point Z soit sur AA′ prolongée de A en A′, on a de même

$$AY^2 \times \frac{A'Z}{AA'} - A'Y^2 \times \frac{AZ}{AA'} = AZ \times A'Z - ZY^2.$$

Que

Que le point Z soit sur AA′ prolongée de A′ en A, on a de même

$$AY^2 \times \frac{A'Z}{AA'} - A'Y^2 \times \frac{AZ}{AA'} = ZY^2 - AZ \times A'Z.$$

Dans ces équations, les quantités $\frac{A'Z}{AA'}$, $\frac{AZ}{AA'}$, sont respectivement les mêmes que les quantités $\frac{m}{m+m'}$, et $\frac{m'}{m+m'}$, pour le premier cas; et pour les deux derniers cas, elles sont les mêmes que les quantités $\frac{m}{m'-m}$, $\frac{m'}{m'-m}$ ou $\frac{m}{m-m'}$ et $\frac{m'}{m-m'}$, employées dans les §§ 39 et 40.

Porisme correspondant au lieu proposé. Soit un cercle donné de grandeur et de position; soient des points en nombre quelconque donnés de position sur un plan; et soient des exposans correspondans de rapports donnés de grandeur. Soit un autre système de points donnés de position, et soient des exposans correspondans de rapports donnés de grandeur; soit aussi un autre exposant de rapport donné de grandeur (de manière que la somme des premiers exposans ne soit pas égale à la somme des derniers). On peut déterminer en même tems la grandeur d'un espace, et la position d'un point correspondant au dernier exposant, de manière que l'espace à assigner soit égal à la différence de la somme des espaces qui ont des rapports donnés aux carrés des distances d'un point de la circonférence du cercle donné aux points qui composent le premier système, et de la somme des espaces qui ont les rapports donnés aux carrés des distances du même point aux points qui composent le second système (le point à déterminer de position y compris).

§ 43.

Problème. On demande le lieu des sommets des triangles dont la base est donnée de grandeur et de position, et dans lesquels le rectangle des côtés est égal au rectangle de la hauteur par une droite donnée de grandeur.

Soit AA′ la base donnée d'un triangle AYA′, dont la hauteur est YX; Fig. 29.
et soit $2l$ une droite donnée de grandeur; on demande le lieu des sommets Y, tels qu'on ait l'équation $AY \times A'Y = XY \times 2l$.

Analyse. Puisqu'on doit avoir l'équation $AY \times A'Y = XY \times 2l$; $XY : AY = A'Y : 2l$; partant, si on conçoit à A′Y une perpendiculaire A′Z élevée depuis le point A′, de manière que $YZ = 2l$; les triangles rectangles YAX, YZA′ seront semblables; et partant, les angles YAX, YZA′, seront égaux; donc, le quadrilatère YAZA′ sera inscriptible au cercle dont $YZ = 2l$ est le diamètre; de là découle la construction suivante:

Construction. Sur AA′ comme base soit décrit un triangle isoscèle dont l est

le côté ; puis du sommet de ce triangle isoscèle comme centre, avec son côté pris pour rayon, soit décrite une circonférence de cercle ; elle sera le lieu cherché des points Y.

Démonstration. Dans ce cercle soit mené le diamètre YZ, et soit menée ZA'. Les triangles rectangles AYX, ZYA', sont équiangles, comme ayant les angles en A et en Z égaux entr'eux ; donc, YX : AY = A'Y : ZY = A'Y : 2*l*. Donc, $2l \times YX = AY \times A'Y$.

Limite. Pour que le problème soit possible, la droite 2*l* ne doit pas être plus petite que la base AA'. Lorsque 2*l* = AA', la circonférence du cercle dont AA' est le diamètre est le lieu cherché.

Remarque 1.re Sur la droite AA' on peut décrire de part et d'autre de cette droite le triangle isoscèle dont *l* est le côté ; et partant, lorsque 2*l* est donnée plus grande que AA' il y a deux cercles dont les circonférences répondent au lieu proposé ; mais ces deux cercles ne diffèrent que par leur position relativement à AA', et seulement en tant que leurs segmens situés du même côté de AA' sont alternes l'un de l'autre.

Remarque 2.e On peut procéder à l'analyse d'une manière un peu différente comme il suit :

Soit AP perpendiculaire à A'Y.

On doit avoir $AY \times A'Y = 2l \times YX$.

Donc, A'Y : YX = 2*l* : AY.

Mais, A'Y : YX = AA' : AP.

Donc, 2*l* : AY = AA' : AP.

et, 2*l* : AA' = AY : AP.

Donc dans le triangle AYP rectangle en P, le rapport de l'hypothénuse AY au côté AP est donné ; donc, ce triangle est donné d'espèce, et en particulier l'angle AYP ou AYA' est donné ; donc, le point Y est à la circonférence d'un segment de cercle capable d'un angle donné.

Cet angle est tel que le rapport du sinus total à son sinus est celui de 2*l* à AA' ; et partant, le diamètre du cercle auquel ce segment appartient est 2*l*.

Remarque 3.e La recherche de ce lieu conduit au théorème connu ; dans tout triangle, le rectangle des deux côtés est égal au rectangle de la hauteur par le diamètre du cercle circonscrit.

Porisme correspondant au lieu proposé. Soit un cercle donné de grandeur et de position, et soit un point donné sur le plan de ce cercle et hors de son centre. On peut déterminer en même tems la position d'une corde donnée de grandeur passant par ce point, et la grandeur d'une droite ; de manière qu'a-

baissant sur cette corde une perpendiculaire depuis un point quelconque de la circonférence ; le rectangle des distances de ce point aux extrémités de la corde soit égal au rectangle de la perpendiculaire par la droite à déterminer de grandeur. La corde à déterminer peut avoir une position double.

§ 44.

Problème. Soient un point et une droite donnés de position ; on demande le lieu des points desquels menant des droites, l'une au point donné et l'autre perpendiculaire à la droite donnée ; le carré de la première soit égal au rectangle de la seconde par une droite donnée de grandeur.

Lemme. Soient deux points donnés de position sur une ligne droite; on demande sur cette droite un point, tel que le carré de sa distance à l'un de ces points soit égal au rectangle de sa distance à l'autre point par une droite donnée de grandeur.

Soient A et B deux points donnés; on demande sur la droite AB (ou sur son prolongement) le point X tel, que le carré de AX soit égal au rectangle de BX par une droite $2l$ donnée de grandeur.

Division. Les positions du point cherché et des points donnés peuvent être quelqu'une des trois suivantes, AXB, XAB, ABX.

Première position. AXB. $AX^2 = 2l \times BX = 2l\,(AB - AX)$. FIG. 30.

$AX^2 + 2l \times AX = 2l \times AB$. Soit prolongée BA en D d'une quantité AD égale à $2l$; et soit coupée AD en deux parties égales au point C.

$AX^2 + 2l \times AX = AX \times DX = CX^2 - AC^2$. Donc,

$CX^2 - AC^2 = 2l \times AB$; $CX^2 = 2AC \times AB + AC^2 = AC(2AB + AC) = AC\,(CB + AB)$.

$= (AC + AB)^2 - AB^2 = CB^2 - AB^2$. De là, découle la construction suivante.

Construction. Soit prolongée BA en C d'une quantité AC égale à l; du point C comme centre avec un rayon dont le carré est égal à l'excès du carré de CB sur le carré de AB soit décrite une circonférence de cercle qui coupe AB en X; le point X est le point de section cherché.

Démonstration. Par construction $CX^2 = CB^2 - AB^2$; donc,

$AC^2 + 2AC \times AX + AX^2 = CB^2 - AB^2 = AC\,(CB + AB) = AC\,(AC + 2AB)$.

$2AC \times AX + AX^2 = 2AC \times AB$.

$AX^2 = 2AC \times AB - 2AC \times AX$.

$= 2AC\,(AB - AX) = 2AC \times BX$.

Remarque 1.re Le rayon de la circonférence décrite du point C comme centre est plus grand que CA, mais plus petit que CB; donc cette circonférence rencontre AB entre A et B, et on obtient la position demandée AXB.

Remarque 2.e Cette circonférence rencontre aussi la ligne BC prolongée au-delà de A dans la direction BA, et le point correspondant X' répond à la seconde position X'AB.

Partant, les deux positions AXB, X'AB, sont liées l'une avec l'autre d'une manière si intime, que la construction donne l'une et l'autre simultanément.

La liaison de ces deux positions est conforme à la correspondance qui a lieu entre les changemens de signe en algèbre, et les changemens de direction en géométrie.

En effet, les lignes AX et AX' ont des directions opposées; mais leurs carrés sont affectés du même signe; mais les lignes BX et BX' ont la même direction et le même signe; partant, les deux équations $AX^2=BX\times 2l$; $AX'^2=BX'\times 2l$; sont résolues en même tems.

Remarque 3.e Puisque $CX=CX'=\sqrt{(CB^2-AB^2)}$.

$BX= \quad CB-\sqrt{(CB^2-AB^2)}$

$BX'= \quad CB+\sqrt{(CB^2-AB^2)}$

$BX\times BX'=AB^2$.

Seconde position. ABX. $AX^2=2l\times BX=2l\,(AX-AB)$.

$AX\,(2l-AX)=2l\times AB$. Soit prolongée BA en D, dans la direction ABD, de manière que $AD=2l$, et soit AD coupée en deux parties égales au point C; $AX\,(2l-AX)=AX\times DX=AC^2-CX^2$; donc, $CX^2=AC^2-2l\times AB=AC\,(AC-2AB)=CB^2-AB^2$. De là, découle la construction suivante.

Construction. Soit prolongée AB en D, de manière que $AD=2l$; soit coupée AD en deux parties égales au point *C*. Du point C comme centre, avec un rayon dont le carré est égal (s'il est possible) à l'excès du carré de CB sur le carré de AB, soit décrite une circonférence de cercle, qui rencontre BD en X; le le point X est le point du prolongement cherché.

Démonstration. Par construction $CX^2=CB^2-AB^2$

ou, $(AX-AC)^2=CB^2-AB^2=AC\,(CB-AB)$

$2AC\times AX-AX^2=AC\,(AC-BC+AB)=2AC\times AB$

$AX^2 \quad =2AC\times BX$.

Remarque 1.re Pour que le problème soit possible, CB ne doit pas être plus petite que AB; et partant, la plus petite valeur de la droite donnée 2l est 4AB. J'affirme que si l'on prend un point X sur AB prolongée, on a constamment $AX^2\geq 4AB\times BX$.

En effet, $AX^2-4AB\times BX=AX^2-4AB\,(AX-AB)=\begin{matrix}(AX-2AB)^2\\(2AB-AX)^2\end{matrix}$.

Remarque 2.e Lorsque la droite donnée *2l* est plus grande que 4AB, le problème

problème a deux solutions, qui répondent l'une et l'autre à la position supposée ABX.

Remarque 3.° Puisque $CX=\sqrt{(CB^2-AB^2)}$.

$$BX=CB-\sqrt{(CB^2-AB^2)}.$$
$$BX'=CB+\sqrt{(CB^2-AB^2)}.$$
$$XB\times BX'=AB^2.$$

Ce lemme établi, je passe au développement du lieu proposé.

Soit P un point donné, et soit AA′ une droite donnée de position. D'un point Y soit menée une droite YP au point P, et soit menée à AA′ une perpendiculaire YX. On demande le lieu des points Y, tels, que le carré de PY soit égal au rectangle de la droite YX par la droite $2l$ donnée de grandeur. Fig. 31.

Premier cas. Que les points Y et le point P soient supposés être du même côté de la droite AA′.

Soit PD perpendiculaire à AA′, et sur PD soient déterminés les points B et B′, tels que $PB^2=2l\times BD$, et $PB'^2=2l\times B'D$ (lemme, 1.re position). Soit coupée BB′ en deux parties égales au point C, soit menée CY, et soit YZ perpendiculaire à PD.

On a $CB^2=CD^2-PD^2=CB'^2$.

Or, $PY^2=CY^2+CP^2-2CP\times CZ=CY^2+CP^2-2CP\,(CD-DZ)$
$=CY^2+CP^2-2CP\times CD+2CP\times XY$.

Mais, on doit avoir $PY^2=2CP\times XY$; donc, $CY^2=2CP\times CD-CP^2$
$=CD^2-(CD-CP)^2=CD^2-PD^2$; donc, $CY=CB$; et partant, les points Y sont à la circonférence d'un cercle dont C est le centre et dont CB est le rayon.

Second cas. Que les points Y et le point P soient des deux côtés opposés de la droite AA′.

Sur PD prolongée au delà du point D, soient déterminés les points B et B′, tels que $PB^2=2l\times BD$; et $PB'^2=2l\times B'D$ (lemme, 2.e position). Soit coupée BB′ en deux parties égales au point C, soit menée CY, et soit YZ perpendiculaire à PD.

On a $CB^2=CD^2-PD^2=CB'^2$.

Or, $PY^2=CY^2+CP^2-2CP\times CZ=CY^2+CP^2-2CP\,(CD-DZ)$
$=CY^2+CP^2-2CP\times CD+2CP\times XY$.

mais on doit avoir, $PY = 2CP\times XY$.

Donc, $CY^2=2CP\times CD-CP^2=CD^2-(CP-CD)^2=CD^2-PD^2$.

Donc, $CY=CB$; et partant, les points Y sont à la circonférence d'un cercle dont BB′ est le diamètre; ou dont C est le centre et dont CB est le rayon.

Les deux cas donnent donc lieu à une construction commune.

Y

Construction. Soit PD perpendiculaire à AA′; sur PD ou sur ses prolongemens soient déterminés les points B et B′ (lemme) tels, que $BP^2 = 2l \times BD$, $B'P^2 = 2l \times B'D$. Sur BB′ comme diamètre soit décrit un cercle; sa circonférence est le lieu cherché des points Y.

La détermination des points B et B′ se fait en prenant depuis le point P sur PD une droite PC égale à l; et cette droite peut être portée sur PD de part et d'autre du point P; les centres C des deux cercles se trouvent par une construction unique.

Les rayons des deux cercles se trouvent aussi par une construction semblable, puisqu'on a $CB^2 = CD^2 - PD^2$. Dans le premier cas, CD est la somme de CP et de PD; et dans le second cas, CD est la différence de CP et de PD.

Démonstration. Par la construction $CB^2 = CD^2 - PD^2$.

Or, $PY^2 = CP^2 + CY^2 - 2PC \times CZ = CP^2 + CD^2 - PD^2 - 2PC \times CZ$

$= CP^2 + CD^2 - PD^2 - 2PC\,(CD - XY)$

Donc, $PY^2 = \begin{matrix}(CD-CP)^2 \\ (CP-CD)^2\end{matrix} - PD^2 + 2PC + XY = 2PC \times XY.$

Remarque 1.re Ce qui a été dit sur le cas du perpendicularisme à la droite donnée de position, s'applique au cas des droites menées des points Y à AA′ sous un angle donné; puisque chacune de ces droites a un rapport donné à la perpendiculaire menée du même point.

Remarque 2.e *Porisme.* Soit un cercle donné de grandeur et de position, et soit une droite hors de ce cercle aussi donnée de position: on peut déterminer en même tems la position d'un point et la grandeur d'une droite, de manière que menant de chacun des points de la circonférence deux droites, l'une au point à déterminer et l'autre perpendiculaire à la droite donnée, le carré de la première droite sera égal au rectangle de la seconde par la droite à déterminer de grandeur.

En effet; puisque $PD^2 = CD^2 - CB^2$; PD est égale à la tangente au cercle menée du point D; et cette tangente peut être portée du point D sur la droite CD de part et d'autre de ce point.

Puisque $PD^2 = CD^2 - CB^2$

$PD = \pm \sqrt{(CD^2 - CB^2)}.$

$CP = l = CD + \sqrt{(CD^2 - CB^2)}.$

Remarque 3.e Soit un cercle donné de grandeur et de position, et soit un point donné de position (non situé sur sa circonférence et différent de son centre). Par un point quelconque de la circonférence soient menées deux droites, l'une au point donné, et l'autre parallèle à une droite donnée de

position. Que le carré de la première droite soit égal au rectangle de la seconde par une droite constante ; le lieu de l'extrémité de la seconde droite est une droite donnée de position.

Savoir, soit menée PC qui rencontre la circonférence en B et en B'. Soit prolongée BB' en D de manière que le rapport de BP^2 à $B'P^2$ soit égal au rapport de BD à B'D; et par D soit élevée à BB' une perpendiculaire, elle sera le lieu des extrémités des secondes droites. Si les secondes droites menées sont parallèles à CP ou BB', la droite constante est double de CP. Si les secondes droites menées ne sont pas parallèles à CP ; la droite constante est moindre que le double de CP dans le rapport du cosinus de l'angle qu'elles font avec CP au sinus total.

Remarque 4.° Le problème proposé renferme la solution du problème suivant. Soient un point et une droite donnés de position. D'un même point soient menées deux droites, l'une au point donné, et l'autre à la droite donnée de position sous un angle donné, que le carré de la première soit égal au rectangle du segment retranché de la droite donnée depuis un point donné, par une droite donnée de grandeur. Le lieu des points depuis lesquels les droites sont menées est une circonférence de cercle.

Application. Soient des points en nombre quelconque donnés de position sur un plan ; et soient des droites aussi en nombre quelconque données de position sur le même plan. D'un point sur ce plan soient menées des droites à tous les points donnés; soient pris les espaces qui ont aux carrés de ces droites des rapports dont les exposans sont donnés, et soit prise la somme (dans un sens général et algébrique) de ces espaces. Du même point soient abaissées sur les droites données de position des perpendiculaires, et soit prise la somme de leurs rectangles par des droites correspondantes données de grandeur. Que ces deux sommes soient égales entr'elles, ou qu'elles diffèrent l'une de l'autre d'un espace donné, ou bien que leur somme soit donnée ; le lieu des points desquels ces droites sont menées est la circonférence d'un cercle (excepté deux cas dans l'un desquels ce lieu est une ligne droite, et dans l'autre desquels il est indéterminé).

Cette application est une combinaison des §§ 36 et 41.

En effet; à la somme des espaces qui ont des rapports donnés aux carrés des droites menées aux points donnés, on peut substituer la somme d'un espace donné de grandeur, et d'un espace qui a un rapport donné au carré de la droite menée à un point donné de position (qui est le centre des moyennes distances des points donnés pour les exposans des rapports donnés). Item, à la somme

des rectangles des droites données de grandeur par les droites menées aux droites données de position, on peut substituer (§ 36) le rectangle d'une droite menée sous un angle donné à une certaine droite donnée de position, par une certaine droite donnée de grandeur, altéré (par addition ou par soustraction) d'un espace donné de grandeur. Partant, l'application proposée est réduite à la question suivante.

Soit un point donné de position, et soit une droite donnée de position : on demande le lieu des points desquels menant une droite au point donné, et une perpendiculaire à la droite donnée de position (ou une droite sous un angle donné), la somme de l'espace qui a un rapport donné au carré de la droite menée au point donné et d'un espace donné de grandeur, ait un rapport donné à la somme du rectangle de la seconde droite menée par une droite donnée de grandeur, et d'un espace donné. Ce problème est aisément réduit à celui qui fait l'objet de ce §.

En particulier, la circonférence d'un cercle est le lieu des sommets des triangles dont la base est donnée de grandeur et de position, et dans lesquels la somme des carrés des côtés est égale au rectangle de la hauteur par une droite donnée de grandeur.

§ 45.

Problème Soient deux points donnés de position ; on demande le lieu des points de chacun desquels menant des droites à ces deux points leur rapport est égal à un rapport donné, différent du rapport d'égalité.

Lemme connu. La droite qui partage un angle d'un triangle en deux parties égales, partage la base en deux parties qui sont entr'elles comme les côtés adjacens, et réciproquement. Item, la droite qui coupe en deux parties égales un angle extérieur d'un triangle, rencontre la base dans un point dont les distances à ses extrémités sont entr'elles comme les côtés adjacens, et réciproquement.

FIG. 32. Soient A et A′ deux points donnés ; et soit le rapport de m à m′ un rapport donné d'inégalité, par exemple de plus grande inégalité ; on demande le lieu des points Y de chacun desquels menant des droites YA, YA′, aux deux points donnés, leur rapport soit égal à celui de m à m'.

Analyse. Sur AA′ et sur son prolongement soient déterminés les points B et B′ qui jouissent de la propriété proposée ; en sorte que m : m′ = AB : BA′ = AB′ : A′B′ ; puisqu'on doit avoir aussi AY : A′Y = m : m′, la droite YB coupe en deux parties égales l'angle AYA′, et la droite YB′ coupe en deux parties égales l'angle de suite du même angle ; et partant, l'angle BYB′ est la moitié de la somme de deux

deux angles de suite; donc, l'angle BYB′ est droit; et partant, le point Y est à la circonférence d'un demi-cercle dont BB′ est le diamètre.

Construction. Sur AA′ et sur son prolongement soient déterminés les points B et B′ qui jouissent de la propriété proposée, puis sur BB′ comme diamètre soit décrit un cercle; sa circonférence est le lieu cherché.

Démonstration. Soit BB′ coupée en C en deux parties égales, et soit menée CY. Puisque $m : m' = AB : BA' = AB' : A'B'$

$$m : m' = AB + AB' : BA' + A'B' = 2BC : 2A'C$$
$$= AB' - AB : A'B' - BA' = 2AC : 2BC.$$

Donc, $m : m' = AC : BC = BC : A'C = AC : CY = CY : A'C$.

Donc, les triangles ACY, YCA′, ont l'angle C commun, et les côtés autour de cet angle proportionnels; donc, ces triangles sont semblables; et en particulier $AY : A'Y = AC : CY = m : m'$.

Remarque 1re. On peut montrer la liaison qui règne entre le lieu proposé dans ce § et celui qui est développé dans le § précédent.

En effet, puisqu'on doit avoir $m : m' = AY : A'Y$

$$mm : m'm' = AY^2 : A'Y^2$$

et $mm : m'm' - mm : AY^2 : A'Y^2 - AY^2$. Soit AA′ coupée en D en deux parties égales; soit YX perpendiculaire à AA′; $A'Y^2 - AY^2 = 2AA' \times DX = 4AD \times DX$; donc, $mm : m'm' - mm = AY^2 : 4AD \times DX$. Soit changé le rapport donné de $m'm' - mm$ à mm, dans celui de 4AD à une droite 2l qui sera donnée de grandeur; on aura $2l : 4AD = AY^2 : 4AD \times DX$; et partant, $AY^2 = 2l \times DX$. Partant, si du milieu D de AA′ on lui élève une perpendiculaire, on a constamment le carré de AY égal au rectangle de la distance du point Y à cette perpendiculaire par une droite donnée.

Remarque 2.e *Porisme.* Soit un cercle donné de grandeur et de position, et soit un point donné de position (non situé sur sa circonférence); on peut déterminer en même tems la position d'un point et la grandeur d'un rapport, de manière que menant des droites d'un point quelconque de la circonférence au point donné et au point à déterminer de position, leur rapport soit donné. En effet; le point A, le centre C, et le rayon R étant donnés; la position du point A′ se détermine par la proportion $AC : R : R : CA'$; et le rapport à déterminer de AY à A′Y, est égal au rapport de AC à R.

d'une droite l à AA', on aura $AY^2 = 2l \times DX$. Donc, le lieu des points Y est une circonférence de cercle.

Construction. Soit le rapport donné celui de m à m' ; soit coupée AA' en deux parties égales au point C; soit converti l'espace donné en un rectangle ayant AA' pour un de ses côtés; soit porté l'autre côté de C en D sur la droite AA' du côté du point A' ; du point D soit élevée à AA' une perpendiculaire. Soit converti le rapport donné de m à m' dans celui d'une droite l qui sera donnée de grandeur à la droite AA' ; et soit construit le lieu des points Y desquels menant une droite au point A, et une perpendiculaire à la droite élevée du point D, le carré de la première soit égal au rectangle de la seconde par la droite l. Ce lieu est celui des points Y.

Troisième cas. Que le rapport donné soit un rapport de plus petite inégalité.

Puisque le rapport de AY^2 à $A'Y^2 + S$ est un rapport donné de plus petite inégalité, aussi le rapport de AY^2 à $A'Y^2 - AY^2 + S$ est un rapport donné, ou le rapport de AY^2 à $S - (AY^2 - A'Y^2)$ est un rapport donné; mais $AY^2 - A'Y^2 = 4AC \times CX$; donc, le rapport de AY^2 à $S - 4AC \times CX$ est donné. Soit converti l'espace S en un rectangle ayant 4AC pour un de ses côtés, que CD soit l'autre; et soit portée CD de C en D du côté de A' : $S - 4AC \times CX = 4AC \times DX$. Donc, le rapport de AY^2 à $4AC \times DX$ est donné; et partant, comme dans le second cas, le point Y est à la circonférence d'un cercle donné; et la construction est sensiblement la même.

Seconde supposition. Soit donné le rapport de AY^2 à $A'Y^2 - S$.

Cette supposition peut être ramenée à la première, en présentant le rapport de AY^2 à $A'Y^2 - S$, sous la forme du rapport de l'espace S' à l'espace S ; et partant, l'espace S' sera donné, et le rapport de $AY^2 + S'$ à $A'Y^2$ sera donné.

Troisième supposition. Soit donné le rapport de AY^2 à $S - A'Y^2$.

Donc aussi, le rapport de AY^2 à $S + AY^2 - A'Y^2$, est donné. Or, $AY^2 - A'Y^2 = 4AC \times CX$; donc, le rapport de AY^2 à $S + 4AC \times CX$ est donné. Soit changé l'espace S dans le rectangle de 4AC par CD, et soit portée CD sur CA de C en D; le rapport de AY^2 à $4AC \times DX$ est donné; et partant (§ 44) le point Y est à la circonférence d'un cercle donné.

Partant, le lieu des points Y est une circonférence de cercle, excepté un cas unique dans lequel il est une ligne droite.

Applications. 1.° Le cas où l'on donne le rapport de la somme ou de la différence du carré de la distance à un des points donnés, et d'un espace donné, à la somme ou à la différence du carré de la distance à l'autre point donné et d'un espace donné, est aisément réduit au problème proposé dans ce §.

Ainsi, soit changé le rapport donné de AY^2+S à $A'Y^2+S'$, dans celui de S à S″ ; donc aussi le rapport de AY^2 à $A'Y^2+S'-S''$, sera égal au rapport donné de S à S″.

Le cas où aux carrés des droites AY et A′Y on substitue les espaces qui ont des rapports donnés à ces carrés se ramène aussi au cas précédent.

En effet; soient *m* et *m′* des exposans donnés de rapports, et soit donné le rapport de $m\times AY^2+S$ à $m'\times A'Y^2+S'$; soient pris les espaces auxquels les espaces donnés S et S′ ont les rapports dont les exposans m et m′ sont donnés ; soient *S* et *S′* ces espaces, le rapport de m (AY^2+S) à m′ $(A'Y^2+S')$ est donné ; et partant aussi le rapport de AY^2+S à $A'Y^2+S'$ est donné.

Seconde application. Soit un système de points donnés de position, et soient des exposans de rapports correspondans donnés de grandeur ; soit un second système de points aussi donnés de position, et soient des exposans correspondans de rapports donnés de grandeur. D'un même point soient menées des droites à tous les points donnés. Que les sommes des espaces qui ont les rapports donnés aux carrés des droites menées aux points de chaque système soient entr'elles dans un rapport donné ; on demande le lieu de ce point.

A la somme des espaces qui ont les rapports donnés aux carrés des droites menées aux points de chaque système, on peut substituer la somme d'un espace donné de grandeur, et de l'espace qui a un rapport donné au carré de la droite menée du même point à un point donné (§ 42). Partant, la question proposée sur deux systèmes de points, dont le nombre et la position sont quelconques, est réduite à la question correspondante sur deux points seulement.

Troisième application. Soit un cercle donné de grandeur et de position, dont le centre est C et dont le rayon est *r*. Soit P un point donné de position sur le plan de ce cercle. Par P soit menée une droite PY, et par Y soit menée une droite qui rencontre la circonférence du cercle en X et en X′. Soit donné le rapport (d'inégalité) du carré de PY au rectangle $XY\times YX'$, le lieu des points Y est une circonférence de cercle.

Premier cas. Soit Y hors du cercle. $XY\times YX'=CY^2-r^2$; donc, le rapport de PY^2 à CY^2-r^2 est donné.

Second cas. Soit Y en dedans du cercle. $XY\times YX'=r^2-CY^2$; donc, le rapport de PY^2 à r^2-CY^2 est donné.

Donc, dans l'un et l'autre cas, le lieu des points Y est une circonférence de cercle.

Il en est de même lorsque le carré et le rectangle proposés doivent subir des changemens donnés par addition ou par soustraction ; et lorsqu'ils doivent

être

être retranchés d'espaces donnés de grandeur ; et il en est encore de même, lorsqu'à ce carré et à ce rectangle on substitue des espaces qui ont à eux des rapports donnés, et qui sont altérés de la même manière.

Quatrième application. Soient deux cercles donnés de grandeur et de position ; on demande le lieu des points de chacun desquels menant des tangentes à ces cercles elles aient entr'elles un rapport donné (différent du rapport d'égalité).

Soient C et C′ les centres de deux cercles donnés dont r et r′ sont les rayons. D'un point Y soient menées à ces cercles des tangentes YT, YT′ ; et soit donné le rapport de TY à T′Y, on demande le lieu des points Y.

Puisque le rapport de YT à YT′ est donné, le rapport de YT^2 à YT'^2 est aussi donné ; mais, $YT^2 = CY^2 - r^2$; et $YT'^2 = C'Y^2 - r'^2$; donc, le rapport de $CY^2 - r^2$ à $C'Y^2 - r'^2$ est donné ; donc, le lieu des points Y est une circonférence de cercle.

CHAPITRE PREMIER.

SECONDE PARTIE.

Additions diverses aux lieux plans d'Apollonius.

§ 47.

Définition. Soit une droite coupée en trois parties, de manière que toute la ligne est à l'une des parties extrêmes, comme l'autre partie extrême est à la moyenne. Cette *ligne* est dite *coupée harmoniquement.* Les deux extrémités de la ligne et les deux points de section, sont appelés *points de section harmonique.*

Problème. Soient deux droites données de position, et soit un point donné de position (non situé sur l'une de ces droites). Par ce point soit menée une droite qui coupe les droites données de position ; sur la droite menée soit déterminé un point tel, que le point donné, les points où elle coupe les droites données, et ce quatrième point, soient des points de section harmonique ; on demande le lieu de ce quatrième point.

Soient SA et SA′ deux droites données de position, et soit un point P hors Fig. 33.

de ces droites aussi donné de position. Par P soit menée une droite qui coupe les droites données en X et en X′ ; sur cette droite soit déterminé un point Y, tel, que les points X, P, X′, Y, soient des points de section harmonique, en sorte qu'on ait PX : PX′ = XY : X′Y ; on demande le lieu des points Y.

Analyse. Que les parallèles à SA′ menées par P et par Y rencontrent SA en B et en Q ; et que les parallèles à SA menées par les mêmes points rencontrent SA′ en B′ et en Q′ ;

A cause des parallèles PX : XY = BP : QY
et PX′ : X′Y = B′P : Q′Y
Mais on doit avoir, PX : XY = PX′ : X′Y
Donc aussi BP : QY = B′P : Q′Y
ou BP : B′P = QY : Q′Y.

Mais, le rapport BP : B′P est donné ; donc aussi, le rapport QY à Q′Y est donné ; donc (§ 33), le lieu des points Y est une ligne droite.

Construction. Que PB parallèle à SA′ rencontre SA en B, et que PB′ parallèle à SA rencontre SA′ en B′. Soit déterminé (§ 33) le lieu des points Y, tels, que menant par ces points des parallèles à SA et à SA′, qui rencontrent SA′ et SA en Q′ et en Q, ont ait PB : PB′ = YQ : YQ′, ce lieu est aussi le lieu cherché.

Démonstration. Par construction ; PB : PB′ = YQ : YQ′ ;
ou PB : QY = PB′ : YQ′
mais, PB : YQ = PX : XY
et PB′ : YQ′ = PX′ : X′Y
donc, PX : XY = PX′ : X′Y
et PX : PX′ = XY : X′Y.

Remarque 1.re Puisque PB : PB′ = YQ : YQ′ ; lorsque la position du point P est telle que le rapport de PB à PB′ est constant, le rapport de YQ à YQ′ est aussi constant ; et partant, lorsque les points P sont sur une même droite menée par S, les points Y sont aussi sur une même droite menée par S.

Savoir, si quatre droites menées d'un même point sont telles, que quelque droite qui les coupe est coupée harmoniquement aux points de section ; toute autre droite qui les coupe est aussi coupée harmoniquement dans les points où elle les rencontre.

Remarque 2.e Lorsque la droite menée est parallèle à SA, le point X inassignable est dit infiniment éloigné ; les lignes inassignables PX, YX, sont dites infinies, et leur rapport est dit un rapport d'égalité ; partant, le rapport de PX′ à X′Y est aussi dans ce cas un rapport d'égalité. Ainsi, le lieu des points Y

peut se déterminer en menant PB′ parallèle à SA, en prolongeant PB′ d'une quantité B′b′ égale à PB′ et en menant Sb′.

En effet, SB′ : B′b′ = SQ′ : YQ′ = YQ : YQ′

ou, PB : PB′ = YQ : YQ′.

Remarque 3.e Lorsque XY : PX = X′Y : PX′; XY × PX′ = X′Y × PX. Si le rapport des rectangles XY × PX′ et X′Y × PX au lieu d'être celui d'égalité, est un rapport donné d'inégalité : on montre de même que le lieu des points Y est une ligne droite.

En effet, XY : PX = QY : BP

PX′ : X′Y = PB′ : YQ′

Donc, XY × PX′ : PX × X′Y = QY × PB′ : YQ′ × PB; partant, si le premier rapport est supposé donné, le second rapport est aussi donné; mais le rapport de PB′ à PB est supposé donné; donc, le rapport de QY à Q′Y est aussi donné, et partant, le lieu des points Y est une ligne droite.

Remarque 4.e PB : PB′ = sin. PSA : sin. PSA′

et YQ : YQ′ = sin. YSA : sin. YSA′.

Donc, sin. PSA : sin. PSA′ = sin. YSA : sin. YSA′.

§ 48.

Problème. Soit un trapèze dont un des côtés parallèles entr'eux est donné, et dont les côtés adjacens au premier de ces côtés sont donnés de position; on demande le lieu des points de section des diagonales de ce trapèze.

Soit AA′ un des côtés parallèles d'un trapèze AA′X′X; que ce côté soit donné de grandeur et de position, et que les côtés adjacens AX, A′X′, soient donnés de position; que les diagonales AX′, A′X se coupent en Y; on demande le lieu des points Y. FIG. 34.

Analyse. Que les côtés AX, A′X′, se rencontrent en S; et que la droite SY rencontre les côtés AA′, XX′, en Q et en Q′.

A cause des parallèles; AQ : A′Q = XQ′ : Q′X′;

et XQ′ : A′Q = X′Q′ : AQ

ou, XQ′ : X′Q′ = A′Q : AQ.

Donc, AQ : A′Q = A′Q : AQ; partant, AQ = A′Q.

Donc, la droite SY rencontre la droite AA′ en un point fixe Q, qui est le milieu de AA′; donc, le lieu des points Y est une ligne droite.

Construction. Que les droites AX, A′X′, se rencontrent en S. Soit AA′ coupée en deux parties égales au point Q. Soit menée SQ; elle est le lieu cherché des points Y.

Démonstration. Elle découle de l'analyse.

Remarque 1.re $SQ : SQ' = AQ : XQ'$
$= A'Q : XQ'$
$= YQ : YQ'$.

Donc, les points S, Q, Q', Y, sont des points de section harmonique. Savoir, dans un trapèze, si on joint le point de section des côtés non parallèles avec le point de section des diagonales par une droite; cette droite est coupée harmoniquement, dans ces points et dans les points dans lesquels elle rencontre les côtés parallèles.

Remarque 2.e Lorsque le côté XX', parallèle à AA' est sur une droite donnée de position, et lorsque ce côté est donné de grandeur; le point S est à une droite donnée de position; le rapport de SQ à SQ' est donné; et partant aussi le rapport de QY à Q'Y est donné, et le point Y est à une droite donnée de position parallèle à AA'.

Remarque 3.e La propriété de la section harmonique qui fait l'objet de la remarque première, n'est pas particulière aux trapèzes, mais elle s'étend à tous les quadrilatères.

Fig. 35. Soit AA'B'B un quadrilatère dont les côtés opposés AB, A'B', se coupent en S, et dont les diagonales AB', A'B, se coupent en Y. Que la droite SY rencontre les côtés AA', BB', dans les points X et X'. J'affirme que $SX : SX' = XY : YX'$.

Que les droites parallèles à AA' menées par B et par B' rencontrent SY en b et en b'.

A cause des parallèles, $AX : Bb = SA : SB$
$A'X : B'b' = SA' : SB'$
Donc, $AX \times XA' : Bb \times B'b' = AS \times SA' : BS \times SB'$.
de même, $AX : B'b' = AY : B'Y$
$A'X : Bb = A'Y : BY$.
Donc, $AX \times XA' : Bb \times B'b' = AY \times YA' : BY \times YB'$.
Donc, $AS \times SA' : BS \times SB' = AY \times YA' : BY \times YB'$
ou, $ASA' : BSB' = AYA' : BYB'$
et, $ASA' : AYA' = BSB' : BYB'$.
Mais, $ASA' : AYA' = SX : YX$
et, $BSB' : BYB' = SX' : YX'$
Donc, $SX : YX = SX' : YX'$. C. q. f. d.

Remarque 4.e Que les côtés opposés AA', BB', se coupent en Z. La droite ZY est aussi coupée harmoniquement au point Y, et aux points dans lesquels elle rencontre

rencontre les côtés AB, A'B'; de manière que les six droites SY, ZY, SA, SA', ZA', ZB', sont coupées harmoniquement dans les points où elles se rencontrent.

§ 49.

Problème. Soit un cercle donné de grandeur et de position, et soit un point donné de position sur le plan de ce cercle. Par le point donné soit menée une droite quelconque qui rencontre la circonférence du cercle; et sur cette droite soit déterminé le quatrième point de section harmonique dont le point donné et les points de rencontre avec la circonférence sont les deux autres points; on demande le lieu de ce quatrième point.

Soit C le centre d'un cercle donné dont le rayon est r. Soit P un point donné de position, qui n'est pas le centre de ce cercle, et qui n'est pas sur sa circonférence. Par P soit menée une droite qui rencontre la circonférence en X et en X'; et sur cette droite soit déterminé le point P', tel, que $PX:PX'=P'X:P'X'$; on demande le lieu des points P'. Fig. 36.

Division. Le point donné P est hors du cercle donné, ou en dedans du cercle donné. Soit CQ perpendiculaire à XX'.

P est au dehors du cercle.	P est en dedans du cercle.
$PX : P'X = PX' : P'X'$	$PX : P'X = PX' : P'X'$
$PX+PX' : P'X+P'X' = PX-PX' : P'X-P'X'$	$PX-PX' : P'X-P'X' = PX+PX' : P'X+P'X'$
$PQ : QX = QX : QP'$	$PQ : QX = QX : QP'$
$PQ \times QP' = QX^2$	$PQ \times QP' = QX^2$
$PQ\,(PQ-PP') = r^2-CQ^2$	$PQ\,(PQ+PP') = r^2-CQ^2$
$QP \times PP' = PQ^2+CQ^2-r^2$	$QP \times PP' = r^2-CQ^2-PQ^2$
$= CP^2-r^2$	$= r^2-CP^2$.

Donc, dans l'un et l'autre cas, le rectangle $QP \times PP'$ est donné de grandeur; mais, le point Q est à la circonférence d'un cercle dont CP est le diamètre; donc (§ 31, remar. 2.e), le point P' est à une ligne droite.

Construction. Soit menée CP qui rencontre la circonférence en A et en A'. Soit le rectangle $AP \times PA'$ égal au rectangle de CP par une droite PD, laquelle soit portée sur CP depuis le point P; vers le centre C si P est au-dehors du cercle, et au-delà du centre dans la direction CPD si P est en dedans du cercle. Puis du point D soit élevée à AA' une perpendiculaire, elle sera le lieu cherché.

Démonstration. Elle découle de l'analyse.

Remarque 1.re Soit P hors du cercle; et soit PT une tangente au cercle menée du point P; $AP \times PA' = PT^2$; mais $AP \times PA' = CP \times PD$; donc, $CP \times PD = PT^2$;

donc, CP : PT = PT : PD ; donc, les triangles CPT, TPD, sont semblables ; mais l'angle CTP est droit, donc l'angle PDT est droit ; et partant, le lieu cherché est la droite qui joint les points de contact des tangentes menées du point P à la circonférence.

Remarque 2.e Soit P au-dedans de la circonférence ; que la perpendiculaire à CP élevée depuis le point P rencontre en T la circonférence, et soient menées CT et DT. $AP \times PA' = PT^2 = CP \times PD$; donc, CP : PT = PT : PD ; donc, les triangles CPT, TPD, sont équiangles ; et l'angle CTD est droit. Donc, le point D se trouve en élevant à CP depuis le point P une perpendiculaire qui rencontre la circonférence en T et en T', le point D est le point de rencontre des tangentes menées par T et par T'.

Remarque 3.e Dans l'un et l'autre cas on a l'équation $r^2 = PC \times CD$; mais, dans le § 45 on a aussi $r^2 = AC \times CA'$; donc, les points P et D prennent la place des points A et A', et le lieu proposé dans ce § a la liaison la plus intime avec celui qui a été traité dans le § 45 ; savoir, quand on a déterminé le lieu des points dont le rapport des distances à deux points donnés est toujours le même, si de l'un de ces points on élève à la droite qui les joint une perpendiculaire, et si de l'autre de ces points on mène une droite qui rencontre cette perpendiculaire et la circonférence ; cette droite est coupée harmoniquement dans ces quatre points.

Remarque 4.e Soit un cercle donné de grandeur et de position, et soit une droite (qui ne passe pas par son centre et qui ne touche pas la circonférence) aussi donnée de position : on peut déterminer la position d'un point, de manière que menant par ce point une droite quelconque qui rencontre la circonférence et la droite donnée de position, ces trois points de section et le point à déterminer soient des points de section harmonique.

§ 50.

Problème. Soit un cercle donné de grandeur et de position ; et soit un point donné de position (hors du centre et non sur sa circonférence). Par ce point soit menée une droite qui coupe la circonférence. Par les points de section soient menées à ce cercle des tangentes ; on demande le lieu des points de rencontre de ces tangentes.

Fig. 36. Soit C le centre d'un cercle donné dont le rayon est r ; soit P un point donné sur le plan de ce cercle. Par P soit menée une droite qui rencontre la circonférence en X et en X', par les points X et X' soient menées au cercle des tangentes qui se coupent en Y ; on demande le lieu des points Y.

Digitized by Google

Analyse. Soit menée CY qui rencontre en Q la droite XX'. Dans le triangle rectangle CXY, $CY \times CQ = r^2$; donc, le rectangle $CY \times CQ$ est donné de grandeur; mais le point Q est à la circonférence du cercle dont CP est le diamètre; donc (§ 31) le point Y est à une droite donnée de position.

Construction. Soit menée CP; à CP et au rayon soit prise une troisième proportionnelle CD; et du point D soit élevée à CD une perpendiculaire : elle sera le lieu des points Y.

Démonstration. Elle découle de l'analyse.

Remarque. Le lieu qui fait l'objet de ce § est le même que celui qui a été traité dans le § précédent, et il donne lieu aux mêmes observations; savoir, si par le point P on mène une droite qui rencontre la circonférence en X et en X'; et si des points X et X' on mène des tangentes au cercle, leur point de rencontre est sur la droite DP', déterminée dans le § 49, et toute droite menée par le point de rencontre des tangentes, est coupée harmoniquement dans les points où elle rencontre la circonférence et la droite qui joint les points de contact.

Scholie. Comme la section harmonique trouve des applications nombreuses et importantes, sur-tout dans la théorie des sections coniques; j'ai cru devoir en exposer les principales propriétés élémentaires dans les lieux que je viens de traiter.

§ 51.

Problème. Soient trois points donnés de position; par l'un de ces points soit menée une droite quelconque sur laquelle soient abaissées des perpendiculaires depuis les deux autres points. Sur la même droite soit déterminé un point, tel, que le rapport de ses distances aux pieds des perpendiculaires soit donné; on demande le lieu de ce dernier point.

Soient C et C' deux points donnés, et soit A un troisième point donné. Fig. 37.
Par A soit menée une droite quelconque sur laquelle soient abaissées les perpendiculaires CP et C'P'. Sur PP' soit déterminé un point P'' tel que le rapport de P''P à P''P' soit égal à un rapport donné; on demande le lieu des points P''.

Analyse. Sur CC' soit déterminé le point C'' tel, que le rapport de CC'' à C'C'' soit égal au rapport donné; et soit menée C''P''. Puisque $CC'' : C'C'' = PP'' : P'P''$, et puisque les droites CP, C'P', sont parallèles entr'elles, la droite C''P'' est parallèle à chacune d'elles; mais les angles en P et en P' sont droits; donc aussi, l'angle P'' est droit; donc, le point P'' est à la circonférence d'un cercle dont AC'' est le diamètre.

Construction. Sur CC′ soit déterminé le point C″, de manière que le rapport de CC″ à C′C″ soit égal au rapport donné; sur AC″ comme diamètre soit décrite une circonférence de cercle; elle sera le lieu des points cherchés.

Démonstration. Elle découle de l'analyse.

Remarque 1.re Lorsque le rapport de CC″ à C′C″ est un rapport donné d'inégalité; le point C″ peut être situé sur la droite CC′ ou sur son prolongement; partant, il y a deux cercles qui jouissent de la propriété proposée. Lorsque le rapport donné est celui d'égalité, le point C″ est le milieu de CC′ et il est unique; partant, il n'y a qu'un cercle dont la circonférence est le lieu cherché.

Remarque 2.e Soit le point A sur la droite CC′, et que le rapport donné soit celui de CA à C′A; l'un des cercles est réduit à son centre A.

Application. Soient deux cercles qui se coupent en A donnés de grandeur et de position. Par A soit menée une droite qui rencontre en X et en X′ les circonférences des cercles donnés; et sur XX′ soit déterminé un point X″ tel, que le rapport de XX″ à X′X″ soit donné. On demande le lieu du point X″.

Soient C et C′ les centres des cercles donnés; et soient CP et C′P′ perpendiculaires à AX. AX=2PX, AX′=2P′X′; XX′=2PP′. Soit conçue AX″=2AP″=2P″X″; on aura aussi XX″=2PP″; et X′X″=2P′P″. Mais, le rapport de XX″ à X′X″ est supposé donné; donc aussi, le rapport de PP″ à P′P″ est donné; donc, le point P″ est à la circonférence d'un cercle donné dont la circonférence passe par A. Mais, AX″=2AP″; donc (§ 28) le point X″ est aussi à la circonférence d'un cercle donné. Savoir, ayant fait CC′:CC″=PP′:PP″; le point X″ est à la circonférence du cercle dont C″ est le centre et dont C″A est le rayon.

§ 52.

Problème. Soient trois droites qui se coupent données de position. D'un point sur le plan de ces droites soit menée une droite qui les coupe; et que les rapports des parties de cette droite comprises entre ce point et les points de section soient donnés; on demande le lieu de ce point.

Premier cas. Que les droites données de position se coupent en un même point.

Fig. 38. Soient SA, SA′, SA″, trois droites données de position qui se coupent en un même point S. Soit un point Y duquel on mène une droite qui rencontre les droites SA, SA′, SA″, dans les points X, X′, X″, respectivement. Que les droites YX, YX′, YX″, soient entr'elles dans des rapports donnés; on demande le lieu des points Y.

Analyse

Analyse. Par Y soit menée à l'une des droites données de position, telle que SA une parallèle qui rencontre en Z' et en Z'' les deux autres droites SA', SA''.

Puisque le rapport de YX à YX' est donné, le rapport de XX' à X'Y est donné ; mais $XX' : X'Y = SX : Z'Y$; donc, le rapport de SX à Z'Y est donné.

De même, le rapport de X''Y à XX'' ou le rapport de Z''Y à SX est donné. Donc, le rapport de Z''Y à Z'Y est donné. Mais les droites SZ', SZ'', sont données de position, et la droite YZ'Z'' est parallèle à une droite SA donnée de position ; donc (§ 33) le lieu des points Y est une droite donnée de position.

Construction. Que le rapport donné de X'Y à XX' soit égal au rapport de a à b ; et que le rapport donné de XX'' à X''Y soit égal au rapport de b à c. Soit déterminé le lieu des points Y, tels, que menant à SA une parallèle qui rencontre SA' et SA'' en Z' en Z'', le rapport de YZ' à YZ'' soit égal au rapport de a à c ; ce lieu est aussi le lieu cherché. Savoir, si par un point Y de ce lieu on a mené une droite YXX'X'' de manière que $X'Y : XX' = a : b$; ou a aussi $XX'' : X''Y = b : c$.

Démonstration. Par supposition $X'Y : XX' = a : b$; mais, $X'Y : XX' = Z'Y : SX$;

donc, $Z'Y : SX = a : b$.

Mais, par supposition $Z''Y : Z'Y = c : a$.

Donc, $Z''Y : SX = c : b$.

Mais, $Z''Y : SX = YX'' : XX''$.

Donc, $YX'' : XX'' = c : b$.

ou, $XX'' : YX'' = b : c$.

Remarque 1.re Les droites menées de différens points de SY de manière à satisfaire à la question, sont parallèles entr'elles.

En effet ; $YX : SY = \text{sin. } YSA : \text{sin. } X$

$SY : YX' = \text{sin. } X' : \text{sin. } YSA'$

Donc, $YX : YX' = \text{sin. } YSA \text{ sin. } X' : \text{sin. } YSA' \text{ sin. } X$

$= SX \text{ sin. } YSA : SX' \text{ sin. } YSA'$. Donc, le rapport $SX : SX'$ est constant.

Remarque 2.e Soient YP, YP', YP'', respectivement perpendiculaires à SA, SA', SA''.

$YP = YX \text{ sin. } X$

$YP' = YX' \text{ sin. } X' = YX' \text{ sin. } (X\text{-}ASA')$

$YP'' = YX'' \text{ sin. } X'' = YX'' \text{ sin. } (X\text{-}ASA'')$.

$$\text{ou } \frac{YP}{YX} = \sin. X$$

$$\frac{YP'}{YX'} = \sin. (X - ASA')$$

$$\frac{YP''}{YX''} = \sin. (X - ASA'')$$

$$\text{De là, } \frac{YP}{YX} \sin. A'SA'' - \frac{YP'}{YX'} \sin. ASA'' + \frac{YP''}{YX''} \sin. ASA' = 0.$$

$$\text{ou, } \frac{\sin. YSA}{YX} \sin. A'SA'' - \frac{\sin. YSA'}{YX'} \sin. ASA'' + \frac{\sin. YSA''}{YX''} \sin. ASA' = 0.$$

$$\text{De là; tang. } YSA = \frac{\frac{YX}{YX''} \sin. ASA' \sin. ASA'' - \frac{YX}{YX'} \sin. ASA' \sin. ASA''}{\sin. A'SA'' - \frac{YX}{YX'} \sin. ASA'' \cos. ASA' + \frac{YX}{YX''} \sin. ASA' \cos. ASA''}$$

Fig. 39. *Second cas.* Que les droites données de position ne se coupent pas en un même point.

Soient A, A', A'', les points de section de trois droites AA', A'A'', A''A, données de position. D'un point Y soit menée une droite qui rencontre les droites données dans les points X'', X et X' respectivement. Que les parties de cette droite YX, YX', YX'', comprises entre le point Y et les points de section, soient entr'elles dans des rapports donnés; on demande le lieu des points Y.

Analyse. Par Y soit menée à l'une des droites données de position telle que AA' une parallèle, qui rencontre les deux autres A''A', A''A en Z et en Z' respectivement.

Puisque le rapport de X'Y à X''Y est donné; aussi, le rapport de X'X'' à X'Y est donné; mais, X'X'' : X'Y = AX'' : Z'Y; donc, le rapport de AX'' à Z'Y est donné; soit ce rapport égal à celui de AA' à une droite AB, laquelle soit portée sur AA' de A en B; et par B soit menée à A''A une parallèle, qui rencontre A''A' en C et Z'Z en V; puisque AX'' : Z'Y = AA' : Z'V; A'X'' : VY = AA' : AB.

De même; puisque le rapport de XY à X''Y est donné; le rapport de XX'' à XY est aussi donné; mais XX'' : XY = A'X'' : ZY; donc, le rapport de A'X'' à ZY est donné; soit ce rapport égal à celui de A'A à une droite A'B' laquelle soit portée sur A'A de A' en B'. Des deux proportions A'X'' : VY = AA' : AB

ZY : A'X'' = A'B' : AA'; on tire

ZY : VY = A'B' : AB; mais, les droites CB, CA', sont données

de position, et la droite YZV est parallèle à une droite AA′ donnée de position; donc (§ 33), le point Y est à une droite menée par C donnée de position.

Construction. Soit changé le rapport donné de X′X″ à X′Y, dans celui du côté AA′ à une droite AB, laquelle soit portée sur AA′ de A en B. Par B soit menée à AA″ une parallèle qui rencontre A′A″ en C. Soit aussi changé le rapport de XX″ à XY, dans celui de AA′ à une droite A′B′. Puis (§ 33), soit déterminé le lieu des points Y, tels, que menant par Y une parallèle à AA′ qui rencontre A″A′ et BC en Z et en V, le rapport de YZ à YV soit égal au rapport de A′B′ à AB; ce lieu est le lieu cherché.

Démonstration. Il faut prouver que si par un point Y de la droite trouvée on mène une droite qui coupe AA′, A′A″, A″A, dans les points X″, X et X′ respectivement; et si on a fait X′X″ : X′Y = AA′ : AB; on aura aussi

$$XX'' : XY = AA' : A'B'.$$

Par supposition; $X'X'' : X'Y = AA' : AB$

Donc, $AX'' : Z'Y = AA' : AB$

et, $A'X'' : VY = AA' : AB$;

Mais, $VY : YZ = AB : A'B'$

Donc, $A'X'' : ZY = AA' : A'B'$.

Mais, $A'X'' : ZY = XX'' : XY$.

Donc, $XX'' : XY = AA' : A'B'$.

Remarque 1.re Le lieu des points Y passe par le point C; et le point C se détermine par la proportion, $AA' : AB = A''A' : A''C$.

Remarque 2.e Par B′ soit menée à A″A′ une parallèle qui rencontre A″A en C′; et que YV rencontre B′C′ en V′; on aura de même $YZ' : YV' = AB : A'B'$; et $AA' : A'B' = A''A : A''C'$.

Remarque 3.e De là, $A''C : A''C' = AB \times A''A' : A'B' \times A''A$.

Remarque 4.e *Porisme.* Soit un quadrilatère AA′CC′ dont les côtés CA′, C′A, se rencontrent en A″. Sur un point Y d'un des côtés CC′ soit menée une droite qui rencontre les autres côtés CA′A″, C′AA″, AA′, en X, X′ et X″ respectivement. On peut déterminer en même tems deux rapports, tels, que le rapport des parties de la droite menée, comprises entre ce point et deux des côtés restans, étant égal à l'un de ces rapports : le rapport des parties de la droite menée, comprises entre le même point et l'un de ces deux côtés et le troisième soit égal à l'autre de ces rapports. Savoir; par C et par C′ soient menées à AA″ et A′A″ des parallèles qui rencontrent AA′ en B et en B′; le

rapport de X'X'' à X'Y étant égal au rapport de AA' à AB; le rapport de XX'' à XY sera égal au rapport de A'A à A'B'.

Remarque 5.e On peut aussi ramener la recherche du lieu proposé au § 36, comme il suit.

Soient YP, YP', YP'', respectivement perpendiculaires à A'A'', A''A, AA'; on a les équations suivantes.

$YP'' = YX''$ sin. X''.

$YP' = YX'$ sin. $X' = YX'$ sin. $(X''+A) = YX'$ (sin. X'' cos. A + cos. X'' sin. A).

$YP = YX$ sin. $X = YX$ sin. $(X''-A') = YX$ (sin. X'' cos. A' — cos. X'' sin. A'); desquelles on obtient l'équation unique

$$\frac{YP'}{YX'} \text{ sin. } A' + \frac{YP}{YX} \text{ sin. } A = \frac{YP''}{YX''} \text{ sin. } A'' \text{ ou}$$

$$YP' \text{ sin. } A' + YP \times \frac{YX'}{YX} \text{ sin. } A = YP'' \times \frac{YX'}{YX''} \text{ sin. } A''$$

Or, les coefficiens de YP', YP, et YP'' sont donnés, donc (§ 36) le lieu des points Y est une ligne droite.

FIG. 40. *Remarque* 6.e Ce dernier procédé s'applique en particulier avec succès au cas où les droites YX, YX', YX'', ne sont pas en ligne droite, mais font entr'elles au point Y des angles donnés. Que les angles XYX', X'YX'', X''YX, soient désignés par y'', y et y' respectivement. On a les équations suivantes.

$YP'' = YX''$ sin. X''.

$YP' = YX'$ sin. $X' = YX'$ sin. $(A+y+X'')$

$YP = YX$ sin. $X = YX$ sin. $(y'+X''-A')$; desquelles on obtient l'équation $\frac{YP}{YX}$ sin. $(A+y) + \frac{YP'}{YX'}$ sin. $(A'-y') = \frac{YP''}{YX''}$ sin. $(A''+y'')$;

ou, YP sin. $(A+y)$ + YP' $\times \frac{YX}{YX'}$ sin. $(A'-y') = YP'' \frac{YX}{YX''}$ sin. $(A''+y'')$. Or, les coefficiens de YP, YP', YP'', sont donnés; donc (§ 36) le lieu des points Y est une ligne droite.

Remarque 6.e On peut faire sur cette seconde supposition relative aux angles XYX', X'YX'', X''YX, une remarque analogue à la quatrième, relative au cas où les points Y, X, X', X'', sont en ligne droite.

§ 53.

Problème. Soit un quadrilatère dont un des côtés pris pour base est donné de grandeur et de position; que le côté opposé à la base lui soit parallèle ou la rencontre en un point donné. Que les points de rencontre des deux côtés adjacens

adjacens à la base et du quatrième côté soient à des droites données de position. On demande le lieu des points de rencontre des deux côtés adjacens à la base.

Soit AXX'A' un quadrilatère dont la base AA' est donnée de grandeur et de position. Que le côté XX' opposé à la base, soit parallèle à la base ou la rencontre en un point donné B. Que les sommets restans X et X' soient sur des droites CS et C'S données de position qui se coupent en S, et qui rencontrent la base en C et en C'. Que les côtés AX, A'X', se rencontrent en Y; on demande le lieu du point Y.

Analyse. Par Y soit menée à AA' une parallèle qui rencontre CS et C'S en Z et en Z'.

Premier cas. Soit XX' parallèle à AA'. Fig. 41. 1.°

$$YZ : AC = YX : AX = YX' : A'X' = YZ' : A'C'.$$

donc, $YZ : YZ' = AC : A'C'$; donc le rapport de YZ à YZ' est donné. Mais, les droites CS, C'S, sont données de position, et la droite ZZ' est parallèle à la droite AA' donnée de position; donc, le point Y est à une droite donnée de position (§ 33).

Construction. Soit cherché le lieu des points Y de chacun desquels menant une droite parallèle à AA' et qui rencontre en Z et en Z' les droites CS et C'S, le rapport des parties YZ et YZ' soit égal au rapport de AC à A'C'; ce lieu est aussi celui des points de rencontre des droites AX et A'X'.

Démonstration. Elle découle de l'analyse.

Second cas. Que la droite XX' rencontre AA' en B, et qu'elle rencontre en V la parallèle à AA' menée par Y. Fig. 41. 2.°

A cause du parallélisme de AA' et de ZZ'; $ZY : VY = AC : AB$

$$VY : YZ' = A'B : A'C'$$

$$\text{donc, } ZY : YZ' = AC \times A'B : A'C' \times AB.$$

Donc, le rapport de ZY à YZ' est donné; mais les droites CS et C'S sont données de position, et la droite ZYZ' est parallèle à une droite AA' donnée de position; donc, le lieu des points Y est une ligne droite donnée de position (§ 33).

Construction. Soit déterminé le lieu des points Y, tels, que menant à AA' une parallèle qui rencontre en Z et en Z' les droites CS et C'S, le rapport de YZ à YZ' soit égal au rapport des rectangles $AC \times A'B$ et $A'C' \times AB$; ce lieu est aussi le lieu cherché.

Démonstration. Elle découle de l'analyse; comme il suit.

Que le lieu proposé (qui passe par S) rencontre AA' en F. D'un point quelconque Y de SF, soient menées, YA qui rencontre CS en X, et YA' qui

rencontre C'S en X' ; et soit menée XX' qui rencontre AA' en B'. J'affirme que B' coïncide avec le point B.

Par construction, $YZ : YZ' = AC \times A'B : A'C' \times AB$;

Or, comme dans l'analyse, $YZ : YZ' = AC \times A'B' : A'C' \times AB'$.

Donc $AC \times A'B : A'C' \times AB = AC \times A'B' : A'C' \times AB'$

Ou, $A'B : AB = A'B' : AB'$

Donc, les points B et B' coïncident.

Remarque 1re. On détermine comme il suit le point F dans lequel le lieu proposé rencontre la droite AA'

$SY : SF = CF : ZY = C'F : Z'Y$;

ou, $CF : C'F = ZY : Z'Y = AC \times A'B : A'C' \times AB$; donc, la position du point F est déterminée.

Remarque 2.e On détermine aussi comme il suit les angles que la droite SF fait avec les droites CS et C'S. En effet ;

$SC : CF = \text{sin. } F : \text{sin. } CSF$

$C'F : SC' = \text{sin. } C'SF : \text{sin. } F$; donc

$SC \times C'F : SC' \times CF = \text{sin. } C'SF : \text{sin. } CSF$; et partant, on détermine le rapport des sinus des parties de l'angle CSC'; et partant, les angles que le lieu proposé fait avec les droites SC, SC'.

Fig. 41. 3.e *Remarque* 3.e La proposition a lieu, non-seulement pour le point de rencontre des côtés AX et A'X' ; mais aussi, pour le point de rencontre des deux diagonales AX', A'X.

En effet, que les deux diagonales AX', A'X, se rencontrent en y, et que la parallèle à AA' menée par y rencontre en z et en z' les droites CX et CX', et qu'elle rencontre en v la droite XX' ; on a de même

$yz : yv = A'C : A'B$

$yv : yz' = AB : AC'$; donc,

$yz : yz' = A'C \times AB : A'B \times AC'$; partant, le point y est à une droite donnée de position qui passe par S. Que cette droite rencontre AA' en f, on a

$Sy : Sf = yz : Cf = yz' : C'f$;

donc, $yz : yz' = Cf : C'f = A'C \times AB : A'B \times AC'$.

Remarque 4.e En général, soient donnés les trois points dans lesquels un des côtés d'un quadrilatère est rencontré par les trois autres ; et partant (en particulier), soient donnés deux des sommets adjacens à ce côté. Que des quatre points de rencontre des trois autres côtés et des deux diagonales, deux de ces points soient à des droites données de position ; les deux autres points de rencontre sont aussi à des droites données de position ; et ces quatre droites partent d'un seul et même point.

Scholie. Le lieu que je viens de traiter ne se trouve pas dans l'ouvrage de SIMSON sur les lieux plans d'APOLLONIUS ; mais, il est développé dans ses ouvrages posthumes (imprimés aux frais et par les soins de feu lord STANHOPE); et il fait partie de son Traité des Porismes. Cependant ce sujet me paroît appartenir immédiatement à la théorie des lieux géométriques.

SIMSON traite fort au long plusieurs cas particuliers ; j'ai cru devoir traiter immédiatement la proposition générale. Cet auteur me paroît avoir omis un cas connexe à ceux qu'il a traités, en ne parlant pas du lieu des points de rencontre des diagonales.

Il paroît par un fragment des Collections de PAPPUS, que cette propriété des lignes droites relative aux quadrilatères, a été connue des anciens, et qu'ils l'avoient même étendue aux figures rectilignes d'un nombre quelconque de côtés, ainsi que le fait SIMSON dans l'ouvrage déjà cité. Je vais esquisser cette application générale par quelques exemples.

Premier exemple. Soit AXX'X''A' un pentagone. Que le côté A'A soit pris pour base ; que les sommets X, X', X'', non adjacens à ce côté soient à des droites données de position, qui rencontrent la base dans les points donnés C, C', C''. Que les droites qui joignent ces sommets deux à deux rencontrent la base dans des points donnés ; j'affirme que les points de rencontre de ces droites sont à des droites données de position. FIG. 42.

Que les droites XX', XX'' rencontrent AA' en B et en b, et que X'X'' rencontre AA' en B'.

Chacun des quadrilatères AXX''A', BX'X''A', B'X'XA, est dans le cas de la proposition principale ; donc, la proposition est vraie pour les points de rencontre de leurs côtés et de leurs diagonales.

Second exemple. Soit AXX'X''X'''A' un hexagone dont le côté AA' est pris pour base. Que les sommets X, X', X'', X''', soient à des droites données de position. Que les droites XX', XX'', XX''', X'X'', X'X''', X''X''', rencontrent la base dans des points donnés, B, b, b', B', C', B'' ; j'affirme que les points de rencontre des côtés et des diagonales de cet hexagone sont aussi à des droites données de position.

En effet, chacun des pentagones AXX'X''A', AXX'X'''A', AXX''X'''A', AX'X''X'''A', BX'X''X'''A', AXX'X''B'', est dans le cas du second exemple.

On passe de même de l'hexagone à l'heptagone, puis à l'octogone, et généralement d'un polygone d'un certain nombre de côtés au polygone d'un nombre de côtés plus grand d'une unité. On a donc généralement la proposition suivante.

Digitized by Google

Soit un polygone dont un des côtés est pris pour base ; que les sommets non adjacens à ce côté soient à des droites données de position. Que les droites qui joignent ces sommets deux à deux rencontrent la base en des points donnés (ou lui soient parallèles). Les points de rencontre de ces droites deux à deux sont aussi à des droites données de position.

Remarque. Le nombre des côtés de la figure étant n, le nombre des sommets non adjacens à la base est $n-2$, et le nombre des droites qui joignent ces sommets deux à deux est $\frac{n-2}{1}\times\frac{n-3}{2}$, ou le n-3.e nombre triangulaire.

§. 54.

Problème. Soient deux droites données de grandeur et de position sur une même droite. D'un même point soient menées des droites aux extrémités des droites données. Que les angles formés par les droites menées aux extrémités d'une même droite soient égaux entr'eux ; on demande le lieu de ce point.

(Fig. 43. Soient AB, A'B', deux droites données de grandeur et de position sur une même droite. Soit Y un point duquel on mène les droites AY, BY, A'Y, B'Y ; que les angles AYB, A'YB', soient égaux entr'eux ; on demande le lieu des points Y.

Lemme. Lorsque deux triangles ont un angle commun, leurs surfaces sont entr'elles comme les excès de la somme des carrés des jambes de l'angle commun sur le carré du côté opposé.

Je supprime la démonstration comme très-facile.

Analyse du problème proposé. Soit AB coupée en deux parties égales au point C, et soit A'B' coupée en deux parties égales au point C'.

$$AY^2+BY^2=2CY^2+2CA^2 ; \text{ et } AY^2+BY^2-AB^2=2(CY^2-CA^2).$$

$$\text{de même } A'Y^2+B'Y^2-A'B'^2=2(C'Y^2-C'A'^2).$$

Donc, $AYB : A'YB'=CY^2-CA^2 : C'Y^2-C'A'^2$. Mais, les triangles de même hauteur AYB, A'YB', sont entr'eux comme leurs bases AB, A'B'.

Donc, $CY^2-CA^2 : C'Y^2-C'A'^2=AC : C'A'$; donc (§ 46), le lieu des points Y est une ligne droite ou une circonférence de cercle suivant que AC et A'C' sont égales ou inégales entr'elles.

Construction. Soient AB et A'B' coupées en deux parties égales dans les points C et C' ; puis (§ 46) soit déterminé le lieu des points Y desquels menant les droites CY, C'Y, aux points C et C', le rapport de CY^2-CA^2 à $C'Y^2-C'A'^2$ soit égal au rapport donné de CA à C'A' ou de AB à A'B', on obtient le lieu cherché.

Démonstration.

Démonstration. Puisque $2CY^2 + 2AC^2 = AY^2 + BY^2$,

et $2C'Y^2 + 2A'C'^2 = A'Y^2 + B'Y^2$,

$AY^2 + BY^2 - AB^2 = 2(CY^2 - AC^2)$

et $A'Y^2 + B'Y^2 - A'B'^2 = 2(C'Y^2 - A'C'^2)$.

Donc, $(AY^2 + LY' - AB^2) : (A'Y^2 + B'Y^2 - A'B'^2) = (CY^2 - AC^2) : (C'Y^2 - A'C'^2)$.

$= AC : A'C'$

$= AYB : A'Y'B$;

donc (lemme) les angles AYB, A'YB', sont égaux entr'eux.

§ 55.

Problème. Soient des droites qui se coupent en un même point données de position, de manière à couper en parties égales la quantité angulaire autour de ce point. D'un même point soient abaissées sur ces droites des perpendiculaires. Que la somme des carrés de ces perpendiculaires soit donnée de grandeur. On demande le lieu de ce point.

Que le point de section des droites données soit désigné par *S*. Que le point duquel on abaisse les perpendiculaires soit désigné par Y; et que les pieds des perpendiculaires soient désignés par *p*. Fig. 44.

Analyse. Les points *p* sont à la circonférence d'un cercle dont SY est le diamètre; et dans ce cercle les points p sont les sommets d'un polygone régulier, dont le nombre des côtés est égal à celui des droites données. Soit ce nombre *n*. On a (§ 38); $f. Yp^2 = 2n \times \frac{1}{4} SY^2$; ou $2f. Yp^2 = nSY^2$. Savoir, le double de la somme des carrés des perpendiculaires abaissées d'un point sur les droites données, est égal au carré de la distance de ce point au sommet commun, répété autant de fois qu'il y a de droites.

Partant, la somme $f. Yp^2$ étant donnée de grandeur, le point Y est à la circonférence d'un cercle dont SY est le rayon.

Construction. Soit partagé l'espace donné de grandeur en parties égales dont le nombre soit égal à celui des droites données. Qu'une de ces parties soit convertie en un carré. La droite SY est égale au côté d'un carré dont le carré de la diagonale est égal à l'une de ces parties.

Démonstration. Elle découle de l'analyse.

Application. $Sp^2 + Yp^2 = SY^2$

Donc, $2f. Sp^2 + 2f. Yp^2 = 2nSY^2$.

Mais, $2f. Yp^2 = n \times SY^2$.

Donc, $2f. Sp^2 = nSY^2$.

Partant, le lieu correspondant à la somme donnée de grandeur $f. Yp^2$, satisfait aussi à la somme donnée de grandeur $f. Sp^2$.

§ 56.

Problème. Soit un polygone régulier donné de grandeur et d'espèce. D'un même point soient abaissées des perpendiculaires sur les côtés de ce polygone, et soit prise la somme des carrés de ces perpendiculaires. Que cette somme soit égale à un espace donné de grandeur; on demande le lieu du point duquel les perpendiculaires sont abaissées.

Que le centre du polygone soit désigné par S; que le point duquel on abaisse les perpendiculaires soit Y. Que ces perpendiculaires soient désignées par YP. Que le rayon du cercle inscrit soit $SA = r$; et que les perpendiculaires abaissées du point Y sur les rayons menés à tous les côtés du polygone soient Yp.

Premier cas. Que le nombre des côtés du polygone soit pair $2n$.

La somme des carrés des perpendiculaires abaissées sur deux côtés opposés parallèles est $2(r^2+Sp^2)$; on a donc,

$f.\ YP^2 = 2n \times r^2 + 2f.\ Sp^2$. Or (§ 55) $2f.\ Sp^2 = nSY^2$.

donc, $f.\ YP^2 = 2n \times r^2 + nSY^2$;

$2f.\ YP^2 = 4n \times r^2 + 2nSY^2$.

Second cas. Que le nombre des côtés du polygone soit impair.

$YP^2 + Yp^2 = YA^2$. Donc, $2f.\ YP^2 + 2f.\ Yp^2 = 2f.\ YA^2$

Or, $2f.\ Yp^2 = n \times SY^2$ (§ 55)

et, $f.\ YA^2 = n \times SA^2 + n \times SY^2$ (§ 38)

Donc, $2f.\ YP^2 + n \times SY^2 = 2n \times SA^2 + 2n \times SY^2$.

$2f.\ YP^2 = 2n \times r^2 + n \times SY^2$.

Partant, dans l'un et l'autre cas, le double de la somme des carrés des perpendiculaires abaissées d'un point Y sur les côtés d'un polygone régulier, est égal à la somme du carré du rayon du cercle inscrit, pris deux fois aussi souvent que le polygone a de côtés; et du carré de la distance de ce point au centre pris aussi souvent que le polygone a de côtés.

Partant, dans l'un et l'autre cas, lorsque la somme des carrés des perpendiculaires est égale à un espace donné; le lieu des points Y est la circonférence d'un cercle donné concentrique au polygone.

Construction. Du double de l'espace donné soit retranché le carré du rayon du cercle inscrit pris deux fois aussi souvent que le polygone a de côtés. Soit divisé le reste en parties égales dont le nombre est égal à celui des côtés du polygone. Le lieu des points Y est la circonférence d'un cercle concentrique au polygone, et dont le carré du rayon est égal à l'une de ces parties.

Démonstration. Elle découle de l'analyse.

Remarque 1.re Le centre d'un polygone régulier est le point duquel abaissant des perpendiculaires sur ses côtés la somme de leurs carrés est la plus petite.

Remarque 2.e Soit un polygone régulier d'un nombre pair de côtés; les sommes des carrés des perpendiculaires abaissées sur les côtés alternatifs sont égales entr'elles.

Remarque 3.e Soient deux polygones réguliers de même nom et concentriques. D'un même point soient abaissées des perpendiculaires sur les côtés de ces polygones. La différence des sommes des carrés des perpendiculaires abaissées sur les côtés de chacun de ces polygones est constante; et elle est égale à la différence des carrés des rayons des cercles inscrits à ces polygones, prise autant de fois que l'un de ces polygones a de côtés.

Remarque 4.e Soient deux polygones réguliers de même nom et non-concentriques. D'un même point Y soient abaissées des perpendiculaires sur tous les côtés de ces polygones. Que la différence des sommes des carrés de ces perpendiculaires qui répondent aux deux polygones soit donnée de grandeur. Le lieu des points Y est une ligne droite (§ 37).

Remarque 5.e Que les polygones proposés aient des nombres différens de côtés; et que la différence (ou la somme) des sommes des carrés des perpendiculaires qui répondent aux deux polygones soit donnée de grandeur; le lieu des points Y est une circonférence de cercle.

Remarque 6.e Cette propriété s'étend à un nombre quelconque de polygones réguliers, ayant des nombres quelconques de côtés (§ 38).

CHAPITRE SECOND.

Application de l'analyse algébrique à la recherche des lieux à la ligne droite et à la circonférence du cercle.

DANS le chapitre précédent, je me suis appliqué à suivre un procédé géométrique. J'ai développé chaque problème particulier par la méthode qui m'a paru la plus propre à en donner la solution; et à montrer la liaison qui règne entre une proposition composée et les propositions plus simples auxquelles elle peut être ramenée. Je me propose d'appliquer au même sujet la méthode algébrique, plus générale, et plus cultivée par le plus grand nombre des mathématiciens modernes, principalement par ceux du continent.

Digitized by Google

Il seroit trop long de développer de nouveau par cette méthode chacune des propositions particulières qui ont fait l'objet des recherches précédentes. Je crois devoir me contenter de l'appliquer à quelques-unes d'entr'elles prises parmi les plus importantes. Il me paroît cependant convenable de rappeler en abrégé les principes généraux sur lesquels cette méthode est fondée, en tant qu'ils sont intimément liés avec le sujet que je traite. Ces principes ont été développés en détail par plusieurs mathématiciens modernes, depuis DESCARTES jusqu'à nos jours. Voyez entr'autres les ouvrages d'EULER, de CRAMER, de LA GRANGE, de l'HÔPITAL, de MONGE, de BIOT, de LA CROIX, de PUISSANT, de GARNIER.

§ 57.

Soit une droite menée arbitrairement sur un plan regardée comme donnée de position; et soit un point pris sur cette droite regardé comme fixe. La position de tout autre point sur ce plan peut être déterminée, par la grandeur de la perpendiculaire abaissée de ce point sur la droite donnée de position, et par la grandeur du segment que cette perpendiculaire retranche de la première droite, à compter depuis le point fixe pris sur elle.

La droite menée arbitrairement est appelée *Axe*; les perpendiculaires abaissées sur l'axe sont appelées *Ordonnées*. Les segmens retranchés de l'axe par les ordonnées, à compter depuis le point fixe, sont appelées *Abscisses*; le point fixe est appelé *Origine*.

De l'origine soit élevée à l'axe une perpendiculaire. On peut substituer aux abscisses comptées sur l'axe les perpendiculaires abaissées sur cette seconde droite. Que cette seconde droite soit prise pour un second axe. Les perpendiculaires abaissées sur ces deux axes, ou les abscisses qui en sont retranchées, sont appelées *coordonnées*.

En tant que les coordonnées sont variables, on a coutume de désigner les abscisses par x et les coordonnées par y; ou, ce qui revient au même, on a coutume de désigner les coordonnées par y et par x respectivement. Les axes sont aussi appelés les axes des x et des y; savoir, on appelle axe des x celui duquel les ordonnées retranchent les abscisses x; et on appelle axe des y celui duquel les ordonnées retranchent les abscisses y.

Pour abréger, on désigne souvent un point par ses coordonnées seulement. Ainsi, on appelle xy le point dont l'abscisse est x, et dont l'ordonnée est y, ou dont les coordonnées sont x et y.

Ce qui a été dit sur les axes perpendiculaires l'un à l'autre, et partant sur les coordonnées rectangulaires, peut s'appliquer aux axes obliques l'un à l'autre;

et

et partant, aux coordonnées obliques respectivement parallèles à ces axes. Mais, à moins que je n'en avertisse expressément, je supposerai les axes, et partant aussi les coordonnées, rectangulaires.

§ 58.

Soient deux points déterminés par leurs coordonnées. On peut déterminer dans ces coordonnées, tant la distance de ces deux points, que la position, relativement aux axes, de la droite qui les joint.

Soit SX l'un des axes, et soit S l'origine. Soient A et A′ deux points déterminés de position par leurs coordonnées AB et SB, A′B′ et SB′. Que A′a parallèle à SX rencontre en *a* l'ordonnée AB. FIG. 45.

$AA'^2 = Aa^2 + A'a^2 = (AB - A'B')^2 + (SB' - SB)^2$.

Soit SB = a, AB = b; SB′ = a′, A′B′ = b′. $AA'^2 = (a'-a)^2 + (b-b')^2$. Savoir, le carré de la distance de deux points est égal à la somme des carrés des différences de leurs coordonnées correspondantes.

Soit b = b′; la droite AA′ est parallèle à l'axe SX, et AA′ = BB′ = a′ − a.

Soit a = a′; AA′ = AB − A′B′ = b − b′, la droite AA′ est perpendiculaire à l'axe SX.

Que AA′ ne soit ni parallèle ni perpendiculaire à l'axe SX, de manière que ni l'une ni l'autre des droites Aa, A′a, ne soit zéro; l'angle que AA′ fait avec SX a pour tangente $\frac{Aa}{A'a} = \frac{b-b'}{a'-a}$; et pour cotangente $\frac{A'a}{Aa} = \frac{a'-a}{b-b'}$. Lorsque b = b′; l'angle que AA′ fait avec SX est zéro, ou AA′ est parallèle à SX. Lorsque a = a′; le complément de l'angle que AA′ fait avec SX est zéro; et partant, cet angle est droit; et AA′ est perpendiculaire à SX. Que Aa et A′a ne soient ni l'une ni l'autre zéro; et soit C le point de rencontre de AA′ et de SX; $Aa : A'a = AB : BC$; $BC = b \times \frac{a'-a}{b-b'}$; $SC = a + b \times \frac{a'-a}{b-b'} = \frac{a'b-ab'}{b-b'}$

Lorsque SC = o; sans que b soit égale à b′; $a : a' = b : b'$; soit b = b′, la droite AA′ ne rencontre pas SX; et l'impossibilité de cette rencontre est indiquée par le signe $\frac{a'b-ab'}{o}$; la distance inassignable SC est dite infinie. Mais, si b et b′ sont l'une et l'autre zéro, l'expression de SC est $\frac{o}{o}$ ou le signe de l'indétermination; les points A et A′ sont l'un et l'autre sur l'axe SX, la droite AA′ convient avec cet axe; et partant, chacun des points de cet axe est un point de rencontre. Soit a = a′; $SC = a \times \frac{b-b'}{b-b'} = a$; la ligne AA′ est perpendiculaire à l'axe SX.

§ 59.

La position d'une ligne droite est aussi déterminée par la position et par la grandeur de la perpendiculaire abaissée sur elle depuis un point fixe, par exemple depuis l'origine.

Fig. 46. Soit AA' une droite sur laquelle on abaisse depuis l'origine S, une perpendiculaire SD; que cette perpendiculaire fasse avec l'axe SX des x, un angle DSX=α; soit YX perpendiculaire à SX. Dans le rectangle dont SX et XY sont les jambes de l'angle droit; on a (§ 3, cor. 5.°),
SX cos. DSX+XY sin. DSX=SY cos. YSD=SD; soit SD=d; à chacun des points xy de la droite AA' répond l'équation, $x \cos. \alpha + y \sin. \alpha = d$.

Cette équation peut-être rendue indépendante de la doctrine du centre des moyennes distances sur laquelle repose le cor. 3.° du § 3, comme il suit. Soit Xx perpendiculaire à SD. Sx=SX cos. DSX=x cos. α; Dx=XY sin. YXx = y sin. α; or, SD = Sx + Dx; donc, $x \cos. \alpha + y \sin. \alpha = d$.

L'équation $x \cos. \alpha + y \sin. \alpha = d$; est appelée l'*équation de la droite* AA', en tant que cette ligne est déterminée par la perpendiculaire *d* abaissée sur elle depuis l'origine, et par les angles que cette perpendiculaire fait avec les axes. En général l'équation d'une ligne est l'équation qui exprime la relation qui a lieu entre les coordonnées de chacun des points de cette ligne.

Exemple. Soient *a* et *b* les coordonnées du centre d'un cercle dont le rayon est *r*; soient *x* et *y* les coordonnées d'un point de la circonférence de ce cercle. Le carré de la distance de ce point au centre du cercle est $(x-a)^2+(y-b)^2$ (§ 58); partant, l'équation de la circonférence du cercle est $(x-a)^2+(y-b)^2=rr$. Dans cette équation, soit a = o, b = o, ou que l'origine soit au centre, l'équation de la circonférence du cercle rapportée à son centre est $xx+yy=rr$.

Dans l'équation de la ligne droite $x \cos. \alpha + y \sin. \alpha = d$, soit x=o, y= d cosec. α; c'est la distance de l'origine au point où la droite proposée rencontre l'axe des *y*; de même, soit y=o, x=d sec. α: c'est la distance de l'origine au point où la droite proposée rencontre l'axe des *x*. Item, l'angle C que la droite proposée fait avec l'axe des *x* est le complément de l'angle que la perpendiculaire SD fait avec le même axe. L'abscisse correspondante au point D est d cos. α; et l'ordonnée correspondante au même point est d sin. α.

§ 60.

On peut ramener à l'équation $x \cos. \alpha + y \sin. \alpha = d$, l'équation de la ligne droite en tant qu'elle est déterminée par deux de ses points. Soient *a* et *b* les

coordonnées d'un de ces points, soient a' et b' les coordonnées de l'autre de ces points. On doit avoir les deux équations $a\cos.\alpha + b\sin.\alpha = d$

$$a'\cos.\alpha + b'\sin.\alpha = d\text{ ; donc,}$$

$$\cos.\alpha(a-a') + \sin.\alpha(b-b') = 0\text{ ; tang.}\alpha = \frac{a'-a}{b-b'}.$$

$$\sin.\alpha = \frac{a'-a}{\sqrt{\left((a-a')^2+(b-b')^2\right)}}\text{ ; }\cos.\alpha = \frac{b-b'}{\sqrt{\left((a-a')^2+(b-b')^2\right)}};$$

$$d = \frac{a(b-b')-b(a-a')}{\sqrt{\left((a-a')^2+(b-b')^2\right)}} = \frac{a'b-ab'}{\sqrt{\left((a-a')^2+(b-b')^2\right)}}.$$

Partant, l'équation de la ligne droite qui passe par les points

$$ab, \text{et } a'b', \text{est } x\times\frac{b-b'}{\sqrt{\left((a-a')^2+(b-b')^2\right)}}+y\times\frac{a'-a}{\sqrt{\left((a-a')^2+(b-b')^2\right)}} = \frac{a'b-ab'}{\sqrt{\left((a-a')^2+(b-b')^2\right)}}.$$

§ 61.

Soit une droite déterminée par son équation ; et soit un point déterminé par ses coordonnées. On demande la grandeur de la perpendiculaire abaissée de ce point sur cette droite.

Soit $x\cos.\alpha + y\sin.\alpha = d$ l'équation de la droite ; et soient a et b les coordonnées du point donné. Du point ab soit menée une perpendiculaire sur la droite d abaissée de l'origine perpendiculairement à la droite proposée. Le segment qu'elle en retranche depuis l'origine est $a\cos.\alpha + b\sin.\alpha$. Or, la perpendiculaire abaissée sur la droite depuis le point ab est la somme ou la différence de ce segment et de la perpendiculaire d abaissée depuis l'origine ; donc, la grandeur de la perpendiculaire abaissée sur la droite depuis le point ab est déterminée.

Par l'origine soit menée à la droite AA′ une parallèle aa' : si le point ab est entre AA′ et la parallèle, la perpendiculaire à AA′ est $d-(a\cos.\alpha + b\sin.\alpha)$; si aa' est entre le point ab et AA′, la perpendiculaire à AA′ abaissée depuis le point ab est $d+(a\cos.\alpha + b\sin.\alpha)$; si AA′ est entre la droite aa' et le point ab, cette perpendiculaire est $a\cos.\alpha + b\sin.\alpha - d = -(d-(a\cos.\alpha + b\sin.\alpha))$. Ce qui est conforme à la correspondance qui a lieu entre les changemens de signes et les changemens de directions.

§ 62.

Soient deux droites déterminées par leurs équations ; on demande de déterminer leur point de section, dans ses coordonnées, et dans l'angle formé par ces deux droites.

Soient $x \cos. \alpha + y \sin. \alpha = d$

$x \cos. \alpha' + y \sin. \alpha' = d'$; les équations de ces deux droites.

Soient x et y les coordonnées de leur point de section ; on trouve

$$x = \frac{d \sin. d' - d' \sin. \alpha'}{\sin. (\alpha' - \alpha)} ; \quad y = \frac{d' \cos. \alpha - d \cos. \alpha'}{\sin. (\alpha' - \alpha)}$$

L'angle des deux droites est le même que l'angle formé par les perpendiculaires abaissées sur elles, depuis l'origine par exemple ; il est donc la différence ou la somme des angles que ces perpendiculaires font avec l'axe des x, suivant que ces deux perpendiculaires sont d'un même côté de cet axe ou des deux côtés du même axe.

De là, on détermine les angles d'un triangle dans les coordonnées de ses sommets. En effet, ces coordonnées déterminent les équations de chacun de ses côtés. Mais, on peut aussi obtenir un de ces angles immédiatement dans ces
Fig. 47. coordonnées. Par un des sommets S soit menée une parallèle à l'axe des abscisses par exemple ; soient A et A' les deux autres sommets desquels soient abaissées sur cette parallèle les perpendiculaires AB, A'B' ; soit $SB = a$, $SB' = a'$; $AB = b$, $A'B' = b'$.

$$\text{tang. } ASB = \frac{b}{a} ; \text{tang. } A'SB' = \frac{b'}{a'} ; \text{tang. } ASA' = \frac{\frac{b - b'}{a - a'}}{1 + \frac{bb'}{aa'}} = \frac{a'b - ab'}{aa' + bb'}$$

$$\sin. ASA' = \frac{a'b - ab'}{\sqrt{((aa + bb)(a'a' + b'b'))}} ; \quad \cos. ASA' = \frac{aa' + bb'}{\sqrt{((aa + bb)(a'a' + b'b'))}}.$$

De là encore, on peut estimer la surface d'un triangle dans les coordonnées de ses sommets.

$$ASA' = ASB + ABB'A' - A'SB'$$

$$2\,ASA' = ab + (b' + b)(a' - a) - a'b' = a'b - ab'.$$

Dans ces expressions ; les droites AB, A'B', SB, SB', sont les différences des coordonnées du sommet S et des coordonnées des sommets A et A'.

§ 65.

Soient trois droites dont on connoît les équations. On peut déterminer les parties de chacune de ces droites comprises entre les deux autres, et la surface du triangle qu'elles comprennent.

Soient

Soient AA', A'A'', A''A, trois droites déterminées par leurs équations.

Equation de AA' . . . . . $x\cos.\alpha'' + y\sin.\alpha'' = d''$

. . . . . A'A'' . . . . . $x\cos.\alpha + y\sin.\alpha = d$

. . . . . A''A . . . . . $x\cos.\alpha' + y\sin.\alpha' = d'$.

Coordonnées de A . . . $x = \frac{d''\sin.\alpha' - d'\sin.\alpha''}{\sin.(\alpha'-\alpha'')}$; $y = \frac{d'\cos.\alpha'' - d''\cos.\alpha'}{\sin.(\alpha'-\alpha'')}$

. . . . . ; A' . . . $x' = \frac{d''\sin.\alpha - d\sin.\alpha''}{\sin.(\alpha-\alpha'')}$; $y' = \frac{d\cos.\alpha'' - d''\cos.\alpha}{\sin.(\alpha-\alpha'')}$.

. . . . . A'' . . . $x'' = \frac{d\sin.\alpha' - d'\sin.\alpha}{\sin.(\alpha-\alpha')}$; $y'' = \frac{d\cos.\alpha' - d'\cos.\alpha}{\sin.(\alpha-\alpha')}$;

$$x - x' = \sin.\alpha'' \times \frac{d''\sin.(\alpha-\alpha') + d'\sin.(\alpha''-\alpha) + d\sin.(\alpha'-\alpha'')}{\sin.(\alpha'-\alpha'')\sin.(\alpha-\alpha'')},$$

$$y - y' = \cos.\alpha'' \times \frac{d''\sin.(\alpha-\alpha') + d'\sin.(\alpha''-\alpha) + d\sin.(\alpha'-\alpha'')}{\sin.(\alpha'-\alpha'')\sin.(\alpha-\alpha'')}.$$

De là, $$AA' = \frac{d''\sin.(\alpha-\alpha') + d'\sin.(\alpha''-\alpha) + d\sin.(\alpha'-\alpha'')}{\sin.(\alpha'-\alpha'')\sin.(\alpha-\alpha'')}.$$

$$A'A'' = \frac{d''\sin.(\alpha-\alpha') + d'\sin.(\alpha''-\alpha) + d\sin.(\alpha'-\alpha'')}{\sin.(\alpha'-\alpha)\sin.(\alpha''-\alpha)}.$$

$$A''A = \frac{d''\sin.(\alpha-\alpha') + d'\sin.(\alpha''-\alpha) + d\sin.(\alpha'-\alpha'')}{\sin.(\alpha-\alpha')\sin.(\alpha''-\alpha)}.$$

Les rapports des trois côtés AA', A'A'', A''A, sont ceux de

$$\sin.(\alpha-\alpha'), \sin.(\alpha'-\alpha''), \sin.(\alpha''-\alpha').$$

De là encore, le double de la surface du triangle est

$$\frac{(d''\sin.(\alpha-\alpha') + d'\sin.(\alpha''-\alpha) + d\sin.(\alpha'-\alpha''))^2}{\sin.(\alpha-\alpha')\times\sin.(\alpha'-\alpha'')\times\sin.(\alpha''-\alpha)}.$$

§ 64.

Problème. Soit un cercle donné de grandeur et de position, par la grandeur de son rayon et par les coordonnées de son centre; soit aussi une droite déterminée par son équation. On demande de déterminer la position de cette droite relativement au cercle; et en particulier on demande de déterminer (dans leurs coordonnées) les points (s'il y a lieu) dans lesquels cette droite rencontre la circonférence de ce cercle.

Soit $x\cos.\alpha + y\sin.\alpha = d$, l'équation de la droite.

Soit $(x-a)^2 + (y-b)^2 = rr$; l'équation de la circonférence. Soient x et y les

coordonnées d'un des points de rencontre. Soient résolues ces deux équations en traitant x et y comme inconnues ; on obtient

$$y = b + (d - a\cos.\alpha - b\sin.\alpha)\sin.\alpha \pm \cos.\alpha \sqrt{(rr - (d - a\cos.\alpha - b\sin.\alpha)^2)}$$
$$x = a + (d - a\cos.\alpha - b\sin.\alpha)\cos.\alpha \mp \sin.\alpha \sqrt{(rr - (d - a\cos.\alpha - b\sin.\alpha)^2)}.$$

Or, $d - a\cos.\alpha - b\sin.\alpha$ est la perpendiculaire abaissée du centre sur la droite donnée de position ; partant, pour qu'il y ait lieu à la rencontre de la droite donnée de position et de la circonférence, la perpendiculaire abaissée du centre sur la droite ne doit pas être plus grande que le rayon. Si cette perpendiculaire est plus petite que le rayon, il y a deux points de rencontre, ou la droite est sécante. Si cette perpendiculaire est égale au rayon, il y a un seul point de rencontre et la droite est tangente. Si la perpendiculaire est plus grande que le rayon, il n'y a aucun point de rencontre, mais la droite est toute entière hors de la circonférence. Que l'origine soit au centre du cercle ;

$$a = o,\ b = o ;\ y = d\sin.\alpha \pm \cos.\alpha \sqrt{(rr - dd)}.$$
$$x = d\cos.\alpha \mp \sin.\alpha \sqrt{(rr - dd)}.$$

On détermine de même les positions mutuelles de deux cercles, dont les grandeurs sont données par celles de leurs rayons, et dont les positions sont données par les coordonnées de leurs centres. Soient a et b les coordonnées du centre d'un des cercles, soit r son rayon ; soient a' et b' les coordonnées du centre de l'autre cercle, soit r' son rayon. Soient x et y les coordonnées d'un des points de rencontre (s'il y a lieu) des deux circonférences. On a les deux équations,

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = rr$$
$$(x - a')^2 + (y - b')^2 = r'r' ;$$ par lesquelles on peut déterminer x et y.

§ 65.

De même qu'une ligne droite est déterminée par deux points, une circonférence de cercle est déterminée par trois points. Soient ab, a'b', a''b'', trois points donnés par leurs cordonnées ; soient x et y les coordonnées du centre du cercle qui passe par ces trois points, et soit r son rayon. On a les trois équations,

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = rr$$
$$(x - a')^2 + (y - b')^2 = rr$$
$$(x - a'')^2 + (y - b'')^2 = rr ;$$ au moyen de ces trois équations on peut déterminer les trois inconnues x, y, r.

$$\text{On trouve, } 2x = \frac{\begin{matrix}(b'-b)\ (b''-b)\ (b'-b'') \\ b\,(a''-a') + b'\,(a-a'') + b''\,(a'-a)\end{matrix}\ \begin{matrix}b\,(a''a''-a'a') \\ +\,b'\,(aa-a''a'') \\ +\,b''\,(a'a'-aa)\end{matrix}}{}$$

$$2y = \frac{\begin{matrix}(a'-a)\ (a''-a)\ (a'-a'') \\ a\,(b''-b') + a'\,(b-b'') + a''(b'-b)\end{matrix}\ \begin{matrix}+\,a\ (b''b''-b'b') \\ +\,a'\,(bb-b''b'') \\ +\,a''(b'b'-bb)\end{matrix}}{}$$

$$2x-2a = \frac{\begin{matrix}(b'-b)\ (b''-b)\ (b'-b'') \\ b\,(a''-a') + b'(a-a'') + b''(a'-a)\end{matrix}\ \begin{matrix}+\,b\,(a''-a')\,(a''-2a+a') \\ -\,b'\,(a-a'')^2 \\ +\,b''(a'-a)^2\end{matrix}}{}$$

$$2y-2b = \frac{\begin{matrix}(a'-a)\ (a''-a)\ (a'-a'') \\ a\,(b''-b') + a'\,(b-b'') + a''(b'-b)\end{matrix}\ \begin{matrix}+\,a(b''-b')\ (b''-2b+b') \\ -\,a'(b-b'')^2 \\ +\,a''\,(b'-b)^2\end{matrix}}{}$$

De même soient données les équations des trois côtés d'un triangle ; on demande le cercle qui touche ces trois côtés.

Que les équations des trois côtés soient

$x \cos.\alpha + y \sin.\alpha = d$

$x \cos.\alpha' + y \sin.\alpha' = d'$

$x \cos.\alpha'' + y \sin.\alpha'' = d''$. Soit r le rayon du cercle inscrit au triangle ; et soient x et y les coordonnées de son centre. On a les trois équations,

$x \cos.\alpha + y \sin.\alpha - d = r$

$x \cos.\alpha' + y \sin.\alpha' - d' = r$

$x \cos.\alpha'' + y \sin.\alpha'' - d'' = r$; au moyen desquelles on peut déterminer les inconnues x, y, r.

$$\text{On trouve : } r = \frac{d \sin.(\alpha''-\alpha') + d' \sin.(\alpha-\alpha'') + d'' \sin.(\alpha'-\alpha)}{\sin.(\alpha-\alpha') + \sin.(\alpha'-\alpha'') + \sin.(\alpha''-\alpha)}$$

$$= \frac{d \sin.(\alpha''-\alpha') + d' \sin.(\alpha-\alpha'') + d'' \sin.(\alpha'-\alpha)}{4 \sin.\frac{\alpha''-\alpha}{2} \sin.\frac{\alpha''-\alpha'}{2} \sin.\frac{\alpha-\alpha'}{2}}$$

§ 66.

La formule fondamentale du § 59 sert de base à la transformation des coordonnées ; savoir, à l'expression des coordonnées relatives à un axe proposé, dans les coordonnées relatives à un autre axe donné de position relativement au premier.

Fig. 48. Soient SX et SX′ deux axes menés par la même origine S, faisant entr'eux un angle donné XSX′ lequel soit α. Soient YP et YP′ des ordonnées à ces axes, menées d'un même point Y. On a (§ 59) les équations,

$$\left.\begin{array}{l} YP = YP'\cos.\alpha + SP'\sin.\alpha \\ SP = SP'\cos.\alpha - YP\sin.\alpha \end{array}\right\} \text{et réciproquement} \left\{\begin{array}{l} YP' = YP\cos.\alpha - SP\sin.\alpha \\ SP' = SP\cos.\alpha + YP\sin.\alpha. \end{array}\right.$$

On peut aussi obtenir ces relations par les premiers principes de la trigonométrie analytique, comme il suit :

$$\begin{aligned} YP = SY\sin.YSX = SY\sin.(YSX'+\alpha) &= SY(\sin.YSX'\cos.\alpha + \cos.YSX'\sin.\alpha). \\ &= YP'\cos.\alpha + SP'\sin.\alpha \\ SP = SY\cos.YSX = SY\cos.(YSX'+\alpha) &= SY(\cos.YSX'\cos.\alpha - \sin.YSX'\sin.\alpha) \\ &= SP'\cos.\alpha - YP'\sin.\alpha. \end{aligned}$$

Exemple. Soit l'équation du cercle, rapporté à son centre pris pour origine par des coordonnées rectangulaires, $yy+xx=rr$. En conservant l'origine, soit un nouvel axe faisant avec le premier un angle α ; et soient y' et x' les coordonnées d'un point de la circonférence rapporté à ce nouvel axe.

On a $y = y'\cos.\alpha + x'\sin.\alpha$

$x = x'\cos.\alpha - y'\sin.\alpha$

$yy = y'y'\cos.^2\alpha + 2x'y'\sin.\alpha\cos.\alpha + x'x'\sin.^2\alpha$

$xx = y'y'\sin.^2\alpha - 2x'y'\sin.\alpha\cos.\alpha + x'x'\cos.^2\alpha$

$xx+yy = y'y' \qquad\qquad + x'x' = rr$. Partant, l'équation du cercle est invariable, quels que soient les axes rectangulaires passant par le centre auxquels on rapporte les points de sa circonférence.

On peut aussi exprimer les coordonnées obliques dans les coordonnées rectangulaires.

Fig. 49. Soient YP et SP les coordonnées rectangulaires d'un point Y rapporté à l'axe SX. Soient Yp et Sp les coordonnées obliques du même point rapporté au même axe. Soit l'angle $YpS = \phi$.

$YP = Yp\sin.\phi$; $Yp = YP\,\text{cosec.}\,\phi$.

$SP = Sp - Pp = Sp - Yp\cos.\phi$; et $Sp = SP + YP\cot.\phi$.

Ce qui a été dit sur les transmutations des coordonnées rapportées à une même

même origine, s'applique aisément aux coordonnées rapportées à des origines différentes. Pour cela, il suffit de mener par l'une des origines une droite parallèle à l'axe qui répond à l'autre origine, et d'altérer (par augmentation ou par diminution) les premières ordonnées de quantités égales aux coordonnées de la première origine.

Après avoir exposé les principes de l'application de l'analyse algébrique à la géométrie, je vais éclaircir cette application par quelques-uns des exemples qui ont été traités géométriquement dans le chapitre précédent. Je crois devoir commencer par quelques-uns d'entr'eux pris parmi les plus simples et les plus faciles.

§. 67.

Problème. Soient deux points déterminés par leurs coordonnées; on demande le lieu des points de chacun desquels menant des droites aux points donnés la différence de leurs carrés soit égale à un espace *S* donné de grandeur.

Soient ab, a'b', les points donnés. Soit xy un des points cherchés.

Les carrés des distances des points ab, a'b', au point xy, sont respectivement $(x-a)^2+(y-b)^2$ et $(x-a')^2+(y-b')^2$ (§ 57); partant, on a l'équation,

$$(a-x)^2+(b-y)^2-(a'-x)^2-(b'-y)^2=S.$$

$$(a+a'-2x)(a-a')+(b+b'-2y)(b-b')=S.$$

$$x(a-a')+y(b-b')=\frac{a+a'}{2}(a-a')+\frac{b+b'}{2}(b-b')-\tfrac{1}{2}S.$$

Cette équation est celle d'une ligne droite.

Pour rendre cette équation conforme à l'équation fondamentale de la ligne droite, $x\cos.\alpha+y\sin.\alpha=d$; dans laquelle $\cos.^2\alpha+\sin.^2\alpha=1$; soient divisés ses deux membres par $\sqrt{((a-a')^2+(b-b')^2)}$ qui est la distance des deux points donnés; soit cette distance *d*.

$$x\times\frac{a-a'}{d}+y\times\frac{b-b'}{d}=\frac{a+a'}{2}\times\frac{a-a'}{d}+\frac{b+b'}{2}\times\frac{b-b'}{d}-\frac{1}{2}\frac{S}{d}.$$

Or, $\frac{a-a'}{d}$ est le cosinus de l'angle que la droite qui joint les points donnés fait avec l'axe des *x*; $\frac{b-b'}{d}$ en est le sinus; $\frac{a-a'}{d}$ est aussi le cosinus de l'angle que la perpendiculaire au lieu cherché fait avec l'axe des *x*; donc, la perpendiculaire au lieu cherché est parallèle à la droite qui joint les points donnés; donc, le lieu cherché est perpendiculaire à la droite qui joint les points donnés (Voyez § 37).

Cette recherche peut être simplifiée, par des suppositions particulières sur les positions des axes et sur celle de l'origine. Soit l'axe des *x* sur la ligne

qui joint les points donnés, et soit l'origine au milieu de cette droite. Dans ce cas, $b=o$, $b'=o$, $a=-a'$. On a $x\times\frac{a-a'}{d}-\frac{1}{2}\times\frac{S}{d}=o$; $x=\frac{1}{2}\times\frac{S}{a-a'}$. Partant, l'abscisse x est constante, ce qui s'accorde avec le perpendicularisme du lieu cherché à la droite qui joint les points donnés.

En particulier, soit $S=o$; ou que les distances des points cherchés aux deux points donnés doivent être égales entr'elles; $x=o$; partant, le lieu cherché est la perpendiculaire à la droite qui joint les points donnés et qui est élevée depuis son milieu.

§ 68.

Problème. Soient deux droites qui se coupent données de position, et soit un rapport donné. On demande sur le plan de ces droites le lieu des points de chacun desquels abaissant sur elles des perpendiculaires elles soient entr'elles dans le rapport donné, lequel soit celui de m à m'.

Soit pris le point de rencontre de ces deux droites pour l'origine des coordonnées. Que les équations de ces deux droites soient $y=x$ tang. α, $y=x$ tang. α'. Soient y et x les coordonnées d'un des points cherchés.

Les perpendiculaires abaissées depuis les points cherchés sur ces droites sont respectivement

$y\cos.\alpha-x\sin.\alpha$, $y\cos.\alpha'-x\sin.\alpha'$; partant, on doit avoir la proportion $y\cos.\alpha-x\sin.\alpha : y\cos.\alpha'-x\sin.\alpha' = m:m'$; de là, $y=x\times\frac{m'\sin.\alpha-m\sin.\alpha'}{m'\cos.\alpha-m\cos.\alpha'}$. Partant, le lieu cherché est une ligne droite qui passe par l'origine, et qui fait avec l'axe des x un angle dont la tangente est $\frac{m'\sin.\alpha-m\sin.\alpha'}{m'\cos.\alpha-m\cos.\alpha'}$.

De là, les tangentes des angles que le lieu cherché fait avec chacune des droites données sont respectivement $\frac{m\sin.(\alpha-\alpha')}{m'-m\cos.(\alpha-\alpha')}$, et $\frac{m'\sin.(\alpha-\alpha')}{m-m'\cos.(\alpha-\alpha')}$.

Les carrés des sinus des mêmes angles sont respectivement $\frac{mm\sin.^2(\alpha-\alpha')}{mm-2mm'\cos.(\alpha-\alpha')+m'm'}$ et $\frac{m'm'\sin.^2(\alpha-\alpha')}{mm-2mm'\cos.(\alpha-\alpha')+m'm'}$. Partant, le lieu proposé fait avec les deux droites données de position des angles dont les sinus sont entr'eux dans le rapport donné.

Remarque 1.re Soit $m=m'$; $y=x\cos.\frac{\alpha+\alpha'}{2}$; le lieu cherché coupe en deux parties égales chacun des angles de suite que font entr'elles les deux droites données de position.

Remarque 2.e J'ai supposé que les points Y de chacun desquels on abaisse

des perpendiculaires sur les droites données de position, sont situés d'un même côté relativement à ces droites.

Que les points Y soient supposés situés des deux côtés opposés de ces droites. Les perpendiculaires abaissées sur l'une des deux droites, par exemple sur la seconde, changent de direction, son expression est $x \sin. \alpha' - y \cos. \alpha'$; et pour obtenir l'équation du lieu proposé, il suffit de changer le signe de m' dans la formule $y = x \times \frac{m' \sin. \alpha - m \sin. \alpha'}{m' \cos. \alpha - m \cos. \alpha'}$; elle devient $y = x \times \frac{m' \sin. \alpha + m \sin. \alpha'}{m' \cos. \alpha + m \cos. \alpha'}$.

Les tangentes des angles que le lieu des points Y fait avec les droites données de position sont respectivement $\frac{m \sin. (\alpha' - \alpha)}{m' + m \cos. (\alpha' - \alpha)}$; et $\frac{m' \sin. (\alpha' - \alpha)}{m + m' \cos. (\alpha' - \alpha)}$; les carrés des sinus des mêmes angles sont respectivement $\frac{mm \sin.^2 (\alpha' - \alpha)}{mm + 2mm' \cos. (\alpha' - \alpha) + m'm'}$, et $\frac{m'm' \sin.^2 (\alpha' - \alpha)}{mm + 2mm' \cos. (\alpha' - \alpha) + m'm'}$. Lorsque $m = m'$ le lieu des points Y coupe en deux parties égales l'angle formé par les deux droites.

§ 69.

Tout étant posé comme dans le § précédent, on demande que la somme des rectangles des perpendiculaires abaissées sur les droites SA et SA′ données de position, par les droites m et m' données de grandeur, soit égale à un espace S donné de grandeur.

Les perpendiculaires abaissées sur les droites SA et SA′ sont respectivement $y \cos. \alpha - x \sin. \alpha$, $y \cos. \alpha' - x \sin. \alpha'$. On a donc l'équation $y (m \cos. \alpha + m' \cos. \alpha') - x (m \sin. \alpha + m' \sin. \alpha') = S$. $y = x \times \frac{m \sin. \alpha + m' \sin. \alpha'}{m \cos. \alpha + m' \cos. \alpha'} + \frac{1}{m \cos. \alpha + m' \cos. \alpha'} S$.

Le lieu cherché est une ligne droite, qui fait avec l'axe des x un angle dont la tangente est $\frac{m \sin. \alpha + m' \sin. \alpha'}{m \cos. \alpha + m' \cos. \alpha'}$; partant, la grandeur de cet angle est indépendante de l'espace S; savoir, les lieux correspondans aux mêmes coefficiens m et m' sont parallèles entr'eux.

La droite qui est le lieu des points Y fait avec les droites SA et SA′ des angles dont les tangentes sont $\frac{m' \sin. (\alpha' - \alpha)}{m + m' \cos. (\alpha' - \alpha)}$, $\frac{m \sin. (\alpha' - \alpha)}{m' + m \cos. (\alpha' - \alpha)}$. Les carrés des sinus de ces angles sont

$$\frac{m'm' \sin.^2 (\alpha' - \alpha)}{mm + 2mm' \cos. (\alpha' - \alpha) + m'm'}, \quad \frac{mm \sin.^2 (\alpha' - \alpha)}{mm + 2mm' \cos. (\alpha' - \alpha) + m'm'}.$$

Digitized by Google

Pour le point dans lequel le lieu des points Y rencontre l'axe, $y = o$, $x = -\frac{1}{m \sin. \alpha + m' \sin. \alpha'} \times S$.

Pour les points dans lesquels le lieu des points Y rencontre les droites SA et SA', on a respectivement $x = \frac{\cos. \alpha}{m' \sin. (\alpha - \alpha')} S$; $x = \frac{\cos. \alpha}{m \sin. (\alpha - \alpha')} S$

$$y = \frac{\sin. \alpha}{m' \sin. (\alpha - \alpha')} S; \quad y = \frac{\sin. \alpha}{m \sin. (\alpha - \alpha')} S.$$

Les distances de ces points au sommet de l'angle formé par ces droites, sont respectivement, $\frac{1}{m' \sin. (\alpha - \alpha')} S$, $\frac{1}{m \sin. (\alpha - \alpha')} S$; et partant, le rapport de ces distances est celui de m à m'.

§ 70.

Problème. Soient des droites SA, SA', SA''.... SA^{n-1}, SA^n, qui se coupent en un même point S, données de position sur un plan. Soient m, m', m'', m'''.... m^{n-1}, m^n, des droites correspondantes en même nombre données de grandeur. On demande le lieu des points Y de chacun desquels abaissant sur ces droites des perpendiculaires, la somme de leurs rectangles par des droites correspondantes données de grandeur, soit égale à un espace S donné de grandeur.

Que le point S de rencontre des droites données de position soit pris pour l'origine. Soient α, α', α'', α'''.... α^{n-1}, α^n, les angles que ces droites font avec l'axe des x; et que ces angles soient regardés comme allant successivement en croissant. Que les points Y soient regardés comme étant situés dans l'angle de suite du plus grand d'entr'eux. Soient x et y les coordonnées d'un de ces points. Les perpendiculaires abaissées de ce point sur les droites données de position sont respectivement,

$y \cos. \alpha - x \sin. \alpha$
$y \cos. \alpha' - x \sin. \alpha'$
$y \cos. \alpha'' - x \sin. \alpha''$
$y \cos. \alpha''' - x \sin. \alpha'''$

$y \cos. \alpha^{n-1} - x \sin. \alpha^{n-1}$.
$y \cos. \alpha^n - x \sin. \alpha^n$.

Partant, on a l'équation $y \times \int. m^n \cos. \alpha^n - x \int. m^n \sin. \alpha^n = S$.

$$y = x \frac{\int. m^n \sin. \alpha^n}{\int. m^n \cos. \alpha^n} + \frac{1}{\int. m^n \cos. \alpha^n} S.$$

Le

Le lieu des points Y est une ligne droite qui fait avec l'axe des x un angle dont la tangente est $\frac{f.\, m^{\varkappa} \sin.\, \alpha^{\varkappa}}{f.\, m^{\varkappa} \cos.\, \alpha^{\varkappa}}$. Les positions des droites données restant les mêmes, cet angle dépend seulement des coefficiens donnés, $m, m', m'', m''' \ldots m^{\varkappa-1}, m^{\varkappa}$; il est indépendant de la grandeur de l'espace S, et partant les lieux correspondans aux mêmes coefficiens sont parallèles entr'eux.

Soit $y = o$; le lieu des points y coupe l'axe des x en un point, tel, que $x = -\frac{1}{f.\, m^{\varkappa} \sin.\, \alpha^{\varkappa}} S$. Soit $x = o$; $y = \frac{1}{f.\, m^{\varkappa} \cos.\, \alpha^{\varkappa}} S$.

Lorsque les angles que les droites données de position font entr'elles et avec l'axe, croissent au-delà de deux droits (par le tournoiement d'une des droites dans un même sens); chacune des quantités $f.\, m^{\varkappa} \sin.\, \alpha^{\varkappa}$ et $f.\, m^{\varkappa} \cos.\, \alpha^{\varkappa}$ peut devenir zéro. Lorsque ces quantités évanouissent en même tems, l'espace S est déterminé à être zéro, et le lieu est indéterminé (voyez § 35).

Soit $f.\, m^{\varkappa} \cos.\, \alpha^{\varkappa} = o$; $x = \frac{1}{f.\, m^{\varkappa} \sin.\, \alpha^{\varkappa}} S$. Le lieu proposé est perpendiculaire à l'axe.

Soit $f.\, m^{\varkappa} \sin.\, \alpha^{\varkappa} = o$; $y = \frac{1}{f.\, m^{\varkappa} \cos.\, \alpha^{\varkappa}} S$; le lieu des points Y est parallèle à l'axe.

§. 71.

Problème général. Soient des droites en nombre quelconque données de position, déterminées par leurs équations. Soient des droites en même nombre données de grandeur. On demande le lieu des points de chacun desquels abaissant sur ces droites des perpendiculaires, la somme de leurs rectangles par les droites données de grandeur soit égale à un espace S donné de grandeur.

Que les équations des droites données de position, soient

$$\begin{aligned}
x \cos.\, \alpha + y \sin.\, \alpha &= d \\
x \cos.\, \alpha' + y \sin.\, \alpha' &= d' \\
x \cos.\, \alpha'' + y \sin.\, \alpha'' &= d'' \\
x \cos.\, \alpha''' + y \sin.\, \alpha''' &= d''' \\
&\ldots \\
x \cos.\, \alpha^{\varkappa-1} + y \sin.\, \alpha^{\varkappa-1} &= d^{\varkappa-1} \\
x \cos.\, \alpha^{\varkappa} + y \sin.\, \alpha^{\varkappa} &= d^{\varkappa}.
\end{aligned}$$

Soient x, y, les coordonnées d'un des points Y cherchés. Les perpendicu-

laires abaissées de ce point sur les droites données de position ont pour leurs expressions.

$$d - (x\cos.\alpha + y\sin.\alpha)$$
$$d' - (x\cos.\alpha' + y\sin.\alpha')$$
$$d'' - (x\cos.\alpha'' + y\sin.\alpha'')$$
$$d''' - (x\cos.\alpha''' + y\sin.\alpha''')$$

$$d^{x-1} - (x\cos.\alpha^{x-1} + y\sin.\alpha^{x-1})$$
$$d^{x} - (x\cos.\alpha^{x} + y\sin.\alpha^{x})$$

Partant, on a l'équation

$$\int m^x dx - x\int m^x \cos.\alpha^x - y\int m^x \sin.\alpha^x = S;$$

et partant, $x \times \frac{\int m^x \cos.\alpha^x}{\sqrt{(\int^2 m^x \cos.\alpha^x + \int^2 m^x \sin.\alpha^x)}} + y \times \frac{\int m^x \sin.\alpha^x}{\sqrt{(\int^2 m^x \cos.\alpha^x + \int^2 m^x \sin.\alpha^x)}}$

$$= \frac{\int m^x dx - S}{\sqrt{(\int^2 m^x \cos.\alpha^x + \int^2 m^x \sin.\alpha^x)}}$$

Partant, le lieu cherché est une ligne droite. La perpendiculaire abaissée de l'origine sur cette droite fait avec l'axe des x un angle dont la tangente est $\frac{\int m^x \sin.\alpha^x}{\int m^x \cos.\alpha^x}$. Cet angle dépend seulement des coefficiens donnés, et des angles que les droites données de position font avec l'axe et par conséquent entr'elles.

Soit $y = o$; l'abscisse correspondante au point où le lieu proposé rencontre l'axe est $\frac{\int m^x dx - S}{\int m^x \cos.\alpha^x}$.

Soit $x = o$; l'ordonnée correspondante à l'origine est $\frac{\int m^x dx - S}{\int m^x \sin.\alpha^x}$.

Le lieu est indéterminé si on a en même tems $\int m^x \sin.\alpha^x = o$, $\int m^x \cos.\alpha^x = o$; et alors, l'espace S est déterminé à être $\int m^x dx$ (voyez § 36).

§ 72.

Problème. Soient deux droites données par leurs équations; et soit un point donné de position. Par ce point soit menée une droite qui coupe les premières; et sur cette droite soit déterminé le quatrième point de section harmonique. On demande le lieu de ce point.

Soient a, b les coordonnées du point donné.

Soient $\begin{matrix} x\cos.\alpha + y\sin.\alpha = d \\ x\cos.\alpha' + y\sin.\alpha' = d' \end{matrix}$, les équations des deux droites. Soient x et y les coordonnées du point dont le lieu est cherché.

Les coordonnées du point où la droite menée coupe la première droite donnée sont $\frac{d\,(a-x)-(ay-bx)\sin.\,\alpha}{(y-b)\sin.\,\alpha-(a-x)\cos.\,\alpha}$, $\frac{(ay-bx)\cos.\,\alpha-d\,(a-x)}{(y-b)\sin.\,\alpha-(a-x)\cos.\,\alpha}$.

Les distances de ce point au point donné et au point $x\ y$ sont

$$\frac{b\sin.\,\alpha+a\cos.\,\alpha-d}{(y-b)\sin.\,\alpha-(a-x)\cos.\,\alpha}\sqrt{((x-a)^2+(y-b)^2)}$$

$$\frac{y\sin.\,\alpha+x\cos.\,\alpha-d}{(y-b)\sin.\,\alpha-(a-x)\cos.\,\alpha}\sqrt{((x-a)^2+(y-b)^2)}$$

Les coordonnées du point où la droite menée coupe la seconde droite donnée, sont $\frac{d'\,(a-x)-(ay-bx)\sin.\,\alpha'}{(y-b)\sin.\,\alpha'-(a-x)\cos.\,\alpha'}$, $\frac{(ay-bx)\cos.\,\alpha'-d'\,(a-x)}{(y-b)\sin.\,\alpha'-(a-x)\cos.\,\alpha'}$.

Les distances de ce point au point donné et au point xy, sont

$$\frac{b\sin.\,\alpha'+a\cos.\,\alpha'-d'}{(y-b)\sin.\,\alpha'-(a-x)\cos.\,\alpha'}\sqrt{((x-a)^2+(y-b)^2)}$$

$$\frac{y\sin.\,\alpha'+x\cos.\,\alpha'-d'}{(y-b)\sin.\,\alpha'-(a-x)\cos.\,\alpha'}\sqrt{((x-a)^2+(y-b)^2)}.$$

Le rapport des distances du point donné ab aux points où la droite menée coupe les deux premières droites, est celui de

$$\frac{b\sin.\,\alpha+a\cos.\,\alpha-d}{(y-b)\sin.\,\alpha-(a-x)\cos.\,\alpha}\ \text{à}\ \frac{b\sin.\,\alpha'+a\cos.\,\alpha'-d'}{(y-b)\sin.\,\alpha'-(a-x)\cos.\,\alpha'}.$$

Le rapport des distances du point xy aux mêmes points est celui de

$$\frac{y\sin.\,\alpha+x\cos.\,\alpha-d}{(y-b)\sin.\,\alpha-(a-x)\cos.\,\alpha}\ \text{à}\ \frac{y\sin.\,\alpha'+x\cos.\,\alpha'-d'}{(y-b)\sin.\,\alpha'-(a-x)\cos.\,\alpha'}.$$

Or, ces quatre distances doivent former une proportion; on a donc l'équation,

$$\frac{b\sin.\,\alpha+a\cos.\,\alpha-d}{b\sin.\,\alpha'+a\cos.\,\alpha'-d'}=\frac{y\sin.\,\alpha+x\cos.\,\alpha-d}{y\sin.\,\alpha'+x\cos.\,\alpha'-d'}$$

De là, on tire l'équation de la ligne droite

$$x\,(d\cos.\,\alpha'-d'\cos.\,\alpha-b\sin.\,(\alpha-\alpha'))+y\,(d\sin.\,\alpha'-d'\sin.\,\alpha+a\sin.\,(\alpha-\alpha'))$$
$$=a\,(d\cos.\,\alpha'-d'\cos.\,\alpha)+b\,(d\sin.\,\alpha'-d'\sin.\,\alpha).$$

Cette équation se simplifie beaucoup par la transposition de l'origine au point de section des droites données de position, dans cette supposition $d=0$, $d'=0$; et l'équation devient $ay=bx$; ou $x:y=a:b$ (voyez le § 47).

Remarque. La recherche algébrique a été compliquée par les expressions absolues des droites qui entrent dans la question; ces expressions sont affectées de facteurs communs qui disparoissent dans l'expression de leur rapport, lequel est l'objet unique de la question proposée.

§ 73.

Problème. Soit un cercle donné par son équation, et soit un point donné par ses coordonnées. Par ce point soit menée une droite qui coupe la circonférence. Sur cette droite soit déterminé le quatrième point de section harmonique, dont le point donné et les points de section de la droite menée et de la circonférence sont les trois autres. On demande le lieu de ce quatrième point.

Soit pris le centre pour l'origine, et soit prise pour axe des abscisses la droite qui joint le point donné avec le centre. Soit r le rayon du cercle : soit a l'abscisse du point donné. Soit z l'angle que la droite menée fait avec l'axe. La perpendiculaire abaissée du centre sur la droite est $a \sin. z$; la distance du pied de cette perpendiculaire au point donné est $a \cos. z$, et les parties de la droite comprise entre le point donné et la circonférence sont $\sqrt{(rr-aa \sin.^2 z)} + a \cos. z$, $\sqrt{(rr-aa \sin.^2 z)} - a \cos. z$. La distance des deux points de section de la droite menée et de la circonférence est $2\sqrt{(rr-aa \sin.^2 z)}$. Cette distance est la différence des distances du point cherché aux mêmes points de section, et le rapport de ces distances est celui de $\sqrt{(rr-aa \sin.^2 z)} + a \cos. z$ à $\sqrt{(rr-aa \sin.^2 z)} - a \cos. z$; donc, ces deux distances sont,

$\frac{\sqrt{(rr-aa \sin.^2 z)}}{a \cos. z}(\sqrt{(rr-aa \sin.^2 z)} + a \cos. z)$ et $\frac{\sqrt{(rr-aa \sin.^2 z)}}{a \cos. z}(\sqrt{(rr-aa \sin.^2 z)} - a \cos. z)$.

la distance du point cherché au point donné est

$\frac{(\sqrt{(rr-aa \sin.^2 z)} + a \cos. z)\ (\sqrt{(rr-aa \sin.^2 z)} - a \cos. z)}{a \cos. z} = \frac{rr-aa}{a \cos. z}$, et la distance du point donné au pied de la perpendiculaire abaissée sur l'axe depuis le point cherché est $\frac{rr-aa}{a \cos. z} \times \cos. z = \frac{rr-aa}{a}$; donc, cette distance est constante, et le lieu cherché est une ligne droite (voyez le § 49).

Les exemples que je viens de développer me paroissent suffire pour éclaircir l'application de l'analyse algébrique à la recherche des lieux à la ligne droite. Je vais traiter dans le même but quelques lieux relatifs à la circonférence du cercle.

§ 74.

Problème. Soient deux points donnés de position. On demande le lieu des points de chacun desquels menant des droites aux deux premiers, elles comprennent entr'elles un angle φ donné de grandeur.

Soient a et b, a' et b', les coordonnées des points donnés. Soient x et y les coordonnées d'un des points cherchés.

La

La droite qui joint les points ab et xy, fait avec l'axe un angle dont la tangente est $\frac{y-b}{x-a}$; de même, la droite qui joint les points a′ b′ et x y fait avec l'axe un angle dont la tangente est $\frac{y-b'}{x-a'}$; partant, les deux droites font entr'elles un angle dont la tangente est

$$\frac{\frac{y-b}{x-a}-\frac{y-b'}{x-a'}}{1+\frac{y-b}{x-a}\times\frac{y-b'}{x-a'}}=\frac{y(a-a')-x(b-b')+a'b-ab'}{xx+yy-y(b+b')-x(a+a')+aa'+bb'}.$$ On a l'équation,

$(xx+yy-y(b+b')-x(a+a')+aa'+bb')$ tang. $\varphi=y(a-a')-x(b-b')+(a'b-ab')$.

Ou, $xx+yy-x(a+a'-(b-b')\cot.\varphi)-y(b+b'+(a-a')\cot.\varphi)+aa'+bb'-(a'b-ab')\cot.\varphi=0$.

D'où l'on tire,

$$\left(y-\left(\frac{b+b'}{2}+\frac{a-a'}{2}\cot.\varphi\right)\right)^2+\left(x-\left(\frac{a+a'}{2}-\frac{b-b'}{2}\cot.\varphi\right)\right)^2=\left(\left(\frac{b-b'}{2}\right)^2+\left(\frac{a-a'}{2}\right)^2\right)\text{cosec.}^2\varphi.$$

Cette équation est celle de la circonférence d'un cercle, pour laquelle les coordonnées du centre sont $\frac{a+a'}{2}-\frac{b-b'}{2}\cot.\varphi$ et $\frac{b+b'}{2}+\frac{a-a'}{2}\cot.\varphi$; et dont le carré du rayon est $\left(\left(\frac{b-b'}{2}\right)^2+\left(\frac{a-a'}{2}\right)^2\right)\text{cosec.}^2\varphi$.

Or; $\left(\frac{a-a'}{2}\right)^2+\left(\frac{b-b'}{2}\right)^2$ est le carré de la demi-distance des deux points donnés ab, a′b′; partant, appelant D cette demi-distance, le rayon du cercle cherché est D cosec. φ.

Soit pris pour origine le milieu de la droite qui joint les points donnés, et pour axe des x cette droite elle-même. Dans cette supposition, $b=0$, $b'=0$, $a=-a'$. L'équation devient $(y-a\cot.\varphi)^2+xx=aa\,\text{cosec.}^2\varphi$. Partant, l'abscisse du centre est zéro; l'ordonnée est a cot. φ, et le rayon est, acosec. φ.

Soit $y=0$; $xx=aa$.; $x=\pm a$; le lieu proposé passe par les points ab, a′b′.

Soit $x=0$; $y=a(\cot.\varphi\pm\text{cosec.}\,\varphi)=\begin{matrix}a\cot.\frac{1}{2}\varphi\\ -a\tan g.\frac{1}{2}\varphi.\end{matrix}$

Tous ces résultats sont conformes à ce que la géométrie présente par intuition.

§ 75.

Problème. Soient deux points A et A′ donnés de position, par leurs coordonnées a, b, a′, b′; on demande le lieu des points, de chacun desquels menant des droites aux deux points donnés, leur rapport soit égal à un rapport donné d'inégalité de m à m'; et soit par exemple $m>m'$.

Soient x et y les coordonnées d'un des points cherchés.

Les carrés des distances du point xy aux points donnés sont $(x-a)^2+(y-b)^2$, et $(x-a')^2+(y-b')^2$ respectivement. Partant, on a la proportion $(x-a)^2+(y-b)^2 : (x-a')^2+(y-b')^2 = mm : m'm'$.

De là, $\left(y-\frac{mmb'-m'm'b}{mm-m'm'}\right)^2+\left(x-\frac{mma'-m'm'a}{mm-m'm'}\right)=\frac{mmm'm'}{(mm-m'm')^2}((a-a')^2+(b-b')^2)$.

Or, $(a-a')^2+(b-b')^2$ est le carré de la distance des deux points donnés, lequel soit dd, on a

$$\left(y-\frac{mmb'-m'm'b}{mm-m'm'}\right)^2+\left(x-\frac{mma'-m'm'a}{mm-m'm'}\right)^2=\left(\frac{mm'}{mm-m'm'}\right)^2 dd.$$

Cette équation est celle de la circonférence d'un cercle dont les coordonnées du centre sont, $\frac{mmb'-m'm'b}{mm-m'm'}$ et $\frac{mma'-m'm'a}{mm-m'm'}$, et dont le rayon est $\frac{mm'}{mm-m'm'}$ d.

Que l'axe des abscisses soit sur la droite qui joint les points donnés, $b=0, b'=0$; l'équation devient $yy+\left(x-\frac{mma'-m'm'a}{mm-m'm'}\right)^2=\left(\frac{mm'}{mm-m'm'}\right)^2 dd$.

Or, $d=a-a'$; donc, lorsque $y=0$, $x=\frac{mma'-m'm'a}{mm-m'm'}\pm\frac{mm'}{mm-m'm'}(a-a')$.

1.re Valeur... $x=\frac{m}{m+m'}a'+\frac{m'}{m+m'}a$

2.e Valeur... $x=\frac{m}{m-m'}a'-\frac{m'}{m-m'}a$.

Les distances du premier de ces points aux points A et A' sont $\frac{m}{m+m'}$, d et $-\frac{m'}{m+m'}$ d. Les distances du second de ces points aux points A et A' sont $\frac{m}{m-m'}$ d et $-\frac{m'}{m-m'}$ d.

Le rapport des distances de chacun de ces points aux points A et A' est celui de m à m' (le signe mis à part). Voyez le § 45.

§ 76.

Problème. Soit un point A donné de position, et déterminé par ses coordonnées *a* et *b*. Soit aussi une droite donnée de position déterminée par l'équation $x\cos.\alpha+y\sin.\alpha=d$. On demande le lieu des points de chacun desquels menant deux droites, l'une au point donné, et l'autre perpendiculaire

à la droite donnée, le carré de la première soit égal au rectangle de la seconde par une droite $2l$ donnée de grandeur.

Soient x et y les coordonnées d'un des points cherchés.

Que les points Y soient regardés comme étant du même côté de la droite donnée que l'est l'origine; la perpendiculaire abaissée du point Y sur la droite a pour expression $d-(x\cos.\alpha+y\sin.\alpha)$; et le carré de la distance du point Y au point ab, est $(x-a)^2+(y-b)^2$. On a donc l'équation

$$(x-a)^2+(y-b)^2=2l\,(d-(x\cos.\alpha+y\sin.\alpha)).$$

De là, $xx-2x\,(a-l\cos.\alpha)+yy-2y\,(b-l\sin.\alpha)aa+bb=2ld.$

$$(x-(a-l\cos.\alpha))^2+y-(b-l\sin.\alpha))^2=2ld+ll-2al\cos.\alpha-2bl\sin.\alpha$$
$$=2l(d-(a\cos.\alpha+b\sin.\alpha)+\tfrac{1}{2}l).$$

Or; $d-(a\cos.\alpha+b\sin.\alpha)$, est la perpendiculaire abaissée sur la droite donnée depuis le point ab, soit cette perpendiculaire D;

$(x-(a-l\cos.\alpha))^2+(y-(b-l\sin.\alpha))^2=2l(D+\frac{1}{2}l)$. Cette équation est celle de la circonférence d'un cercle dont le carré du rayon est $2l\,(D+\frac{1}{2}l)$; et pour lequel les coordonnées du centre sont $a-l\cos.\alpha$ et $b-l\sin.\alpha$ (Voyez le § 44).

§ 77.

Problème. Soient A et A′ deux points donnés de position par leurs coordonnées a et b, a′ et b′. Soient m et m′ des exposans donnés de rapports. On demande le lieu des points Y, de chacun desquels menant des droites aux points donnés, la somme des espaces qui ont aux carrés des distances de ces points aux points donnés, les rapports donnés, soit donnée de grandeur et égale à l'espace donné S.

Soient x et y les coordonnées d'un des points cherchés. On a l'équation

$m\,(x-a)^2+m\,(y-b)^2+m'\,(x-a')^2+m'\,(y-b')^2=S.$

$yy(m+m')-2y(mb+m'b')+xx(m+m')-2x(ma+m'a')+maa+m'a'a'+mbb+m'b'b'=S.$

$$(y-\frac{mb+m'b'}{m+m'})^2+(x-\frac{ma+m'a'}{m+m'})^2=\frac{1}{m+m'}S-\frac{mm'}{(m+m')^2}\left((a-a')^2+(b-b')^2\right).$$

Or, $(a-a')^2+(b-b')^2$ est le carré de la distance des deux points donnés, laquelle soit d. On a donc

$$(y-\frac{mb+m'b'}{m+m'})^2+(x-\frac{ma+m'a'}{m+m'})^2=\frac{1}{m+m'}S-\frac{mm'}{(m+m')^2}dd.$$

Cette équation appartient à la circonférence d'un cercle dont le carré du rayon est $\frac{1}{m+m'}S-\frac{mm'}{(m+m')^2}dd$; et pour lequel les coordonnées du centre sont $\frac{ma+m'a'}{m+m'}$ et $\frac{mb+m'b'}{m+m'}$. Il suit de là, que ce centre coïncide avec le

centre des moyennes distances des points A et A′ pour les coefficiens m et m′ respectivement, et pour que le problème soit possible on doit avoir

$S \gtreqless \frac{mm'}{m+m'} dd$ (Voy. § 39).

Au lieu de s'occuper de la somme des espaces proposés, que la question roule sur la différence de ces espaces. On a l'équation

$m((x-a)^2+(y-b)^2) - m'((x-a')^2+(y-b')^2) = S.$

Première supposition. Soit $m > m'$.

$(y-\frac{mb-m'b'}{m-m'})^2 + (x-\frac{ma-m'a'}{m-m'})^2 = \frac{1}{m-m'}S + \frac{mm'}{(m-m')^2}dd$. Cette équation est celle de la circonférence d'un cercle dont le carré du rayon est $\frac{1}{m-m'}S + \frac{mm'}{(m-m')^2}dd$; et les coordonnées du centre sont $\frac{ma-m'a'}{m-m'}$ et $\frac{mb-m'b'}{m-m'}$. Ce centre coïncide avec l'excentre des moyennes distances des points A et A′ pour les coefficiens m et m′.

Seconde supposition. Soit $m < m'$.

$(y-\frac{m'b'-mb}{m'-m})^2 + (x-\frac{m'a'-ma}{m'-m})^2 = \frac{mm'}{(m'-m)^2}dd - \frac{1}{m'-m}S.$

Le lieu des points Y est une circonférence de cercle dont le carré du rayon est $\frac{mm'}{(m'-m)^2}dd - \frac{1}{m'-m}S$; et dont les coordonnées du centre sont $\frac{m'a'-ma}{m'-m}$, $\frac{m'b'-mb}{m'-m}$; et pour que le lieu soit possible on doit avoir

$S \lesseqgtr \frac{mm'}{m'-m}dd$ (Voy. § 40).

Soit $m=m'=1$. Le lieu proposé est une ligne droite.

§ 78.

Problème plus général. Soient A, A′, A″, A‴ . . . . . A^{x-1}, A^x, des points donnés de position par leurs coordonnées a, b; a′, b′; a″, b″; a‴, b‴; . . . . a^{x-1}, b^{x-1}; a^x, b^x. Soient m, m′, m″, m‴ . . . . m^{x-1}, m^x, des exposans correspondans de rapports donnés de grandeur. On demande le lieu des points Y, de chacun desquels menant des droites aux points donnés, la somme des espaces qui ont aux carrés de ces droites les rapports dont les exposans sont donnés, soit égale à un espace *S* donné de grandeur.

Soient

Soient x et y les coordonnées d'un des points cherchés. On a l'équation

$$\begin{aligned} &m\,((x-a)^2+(y-b)^2)\\ &+m'\,((x-a')^2+(y-b')^2)\\ &+m''\,((x-a'')^2+(y-b'')^2)\\ &+m'''((x-a''')^2+(y-b''')^2)\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\\ &+m^{n-1}((x-a^{n-1})^2+(y-b^{n-1})^2)\\ &+m^n\,((x-a^n)^2+(y-b^n)^2)=S. \end{aligned}$$

$$xx\int m^n-2x\int m^n a^n+yy\int m^n-2y\int m^n b^n+\int m^n a^{n\,2}+\int m^n b^{n\,2}=S.$$

$$(y-\frac{\int m^n b^n}{\int m^n})^2+(x-\frac{\int m^n a^n}{\int m^n})^2=\frac{1}{\int m^n}S-\int\cdot\frac{m^{n-1}m^n}{\int^2 m^n}A^{n-1}A^n.$$

Cette équation est celle de la circonférence d'un cercle dont les coordonnées du centre sont, $\frac{\int m^n a^n}{\int m^n}$ et $\frac{\int m^n b^n}{\int m^n}$.

Ce centre est celui des moyennes distances des points donnés pour les coefficiens donnés. Le carré du rayon de ce cercle est $\frac{1}{\int m^n}S.-\int\cdot\frac{m^{n-1}m^n}{\int^2 m^n}A^{n-1}A^{n\,2}$; et la plus petite valeur de l'espace S est $\int\cdot\frac{\int m^{n-1}m^n}{\int m^n}-A^{n-1}A^{n\,2}$ (Voyez § 42).

La quantité $\int\cdot\frac{m^{n-1}m^n}{\int m^n}A^{n-1}A^{n\,2}$ est la somme des espaces, qui ont aux carrés des distances des points donnés entr'eux, les rapports dont les exposans sont les termes quatrièmes proportionnels, à la somme des exposans donnés, et aux deux exposans correspondans à ces points pris deux à deux. Cette somme est la plus petite valeur de l'espace S.

Si la question est relative à quelque différence au lieu d'une somme, les formules précédentes s'appliquent à ce cas en changeant les signes des coefficiens des termes qui composent le soustrahende.

Si la somme des coefficiens est zéro; ou si la somme des coefficiens répondans aux addendes est égale à la somme des coefficiens des soustrahendes; le lieu proposé est une ligne droite.

§ 79.

Problème. Soit une droite donnée de position, et soit un point donné sur cette droite; on demande le lieu des points de chacun desquels menant à cette droite une ordonnée sous un angle donné; l'espace qui a un rapport donné au carré de l'abscisse, diffère du carré de l'ordonnée, d'un espace qui a un rapport donné au rectangle de l'abscisse par l'ordonnée.

Fig. 50. Soit A un point donné sur une droite indéfinie AB; on demande le lieu des points M de chacun desquels menant à la droite AB une ordonnée MP sous un angle donné, l'espace qui a un rapport donné au carré de AP soit égal à la somme ou à la différence du carré de MP, et de l'espace qui a un rapport donné au rectangle AP×MP.

Analyse. Soit conçue MP prolongée en Q de manière que le rapport de PQ à AP soit égal au second rapport donné. Le point Q est à une droite AQ donnée de position; et partant, le rapport du carré de AP au rectangle MP×MQ est donné. Soit conçue PQ coupée en Z en deux parties égales; le point Z est aussi à une droite AZ donnée de position; et $MP\times MQ=MZ^2-PZ^2$; donc, le rapport de AP^2 à MZ^2-PZ^2 est donné; mais le rapport de AP^2 à PZ^2 est donné; donc le rapport de PZ^2 à MZ^2-PZ^2 est donné; donc aussi, le rapport de PZ^2 à MZ^2 est donné; mais, les droites AP, AZ, sont données de position, et la droite MZ est parallèle à une droite donnée de position; donc (§ 33) le point M est à une droite donnée de position.

Construction. D'un point quelconque P de AB soit menée sous l'angle donné une droite PQ, telle que le rapport de PQ à AP soit égal au second des rapports donnés; le point Q est à une droite AQ donnée de position. Soit PQ coupée en deux parties égales au point Z, le point Z est aussi à une droite AZ donnée de position; soit le rapport donné de AP^2 à $MQ\times MP$ ou MZ^2-PZ^2 égal au rapport de p à q; et soit le rapport de PZ^2 à AP^2 égal au rapport de q à r; et partant, soit $PZ^2 : MZ^2-PZ^2$ égal au rapport de p à r; et $PZ^2 : MZ^2 = p : p+r$. Soit donc déterminé le lieu des points M, tels, que $PZ^2 : MZ^2 = p : p+r$; ce lieu est aussi le lieu cherché.

Remarque 1.re Le lieu des points M est une double ligne droite; savoir, si on prend ZM'=ZM; la droite AM' est aussi une des droites cherchées; mais alors, M'Q=M'P=PQ; et partant, la droite AM' répond au cas dans lequel on demande le lieu des points M' tels que le carré de AP a un rapport donné à l'excès du carré de M'P sur l'espace qui a un rapport donné au rectangle de M'P par AP.

Remarque 2.e Soit donné le rapport du carré de AP à l'excès de l'espace qui a un rapport donné au rectangle de AP par MP sur le carré de MP.

La droite PQ doit être portée du même côté de AB que la droite MP; et ayant fait la même construction, le rapport de

$AP^2 : PZ^2 - MP^2$ est donné $= p : q$.
$PZ^2 : AP^2 = q : r$.
Donc, $PZ^2 : PZ^2 - MP^2 = p : r$.
$PZ^2 : MP^2 = p : p-r$.

Partant; pour que le lieu soit possible, on doit avoir $p > r$; et lorsqu'il est possible, il y a deux droites situées du même côté de AB qui répondent à la question proposée.

Remarque 3.° Le lieu proposé répond à la résolution de l'une des trois équations suivantes.

$$\frac{m}{n}\,xx = y\left(y + \frac{2p}{q}x\right).$$

$$\frac{m}{n}\,xx = y\left(y - \frac{2p}{q}x\right)$$

$$\frac{m}{n}\,xx = y\left(\frac{2p}{q}x - y\right).$$

1.° Soit $\frac{m}{n}\,xx = y\left(y + \frac{2p}{q}x\right)$; $\left(y + \frac{p}{q}x\right)^2 = xx\left(\frac{m}{n} + \frac{pp}{qq}\right)$;

2.° Soit $\frac{m}{n}\,xx = y\left(y - \frac{2p}{q}x\right)$; $\left(y - \frac{p}{q}x\right)^2 = xx\left(\frac{m}{n} + \frac{pp}{qq}\right)$;

3.° Soit $\frac{m}{n}\,xx = y\left(\frac{2p}{q}x - y\right)$; $\left(y - \frac{p}{q}x\right)^2 = xx\left(\frac{pp}{qq} - \frac{m}{n}\right)$.

Dans le premier cas; $y = x\left(\pm\sqrt{\left(\frac{m}{n} + \frac{pp}{qq}\right)} - \frac{p}{q}\right)$.

Second cas . . . . $y = x\left(\pm\sqrt{\left(\frac{m}{n} + \frac{pp}{qq}\right)} + \frac{p}{q}\right)$.

Troisième cas . . . $y = x\left(\pm\sqrt{\left(\frac{pp}{qq} - \frac{m}{n}\right)} + \frac{p}{q}\right)$.

Donc, dans tous les cas, le rapport de y à x est donné; donc, le lieu répondant à l'équation proposée, s'il est possible, est une double ligne droite.

§ 80.

Soit un polygone régulier d'un nombre n de côtés. D'un point pris sur le plan de ce polygone soient abaissées des perpendiculaires sur ses côtés. Soit prise la somme des carrés de ces perpendiculaires; et que cette somme soit égale à un espace S donné de grandeur. On demande le lieu des points desquels ces perpendiculaires sont abaissées.

Lemme premier. $2\sin.^2 a = 1 - \cos. 2a$

$$2\cos.^2 a = 1 + \cos. 2a.$$

Lemme second. Trouver les sommes des sinus et des cosinus des arcs qui croissent comme les nombres naturels.

Soit $S = \sin. a + \sin. 2a + \sin. 3a + \ldots + \sin. na$

$S' = 1 + \cos. a + \cos. 2a + \cos. 3a + \ldots + \cos. na.$

$$\begin{aligned} \text{On a } S &= \sin. a\,(1 + \cos. a + \cos. 2a + \ldots + \cos.(n-1)a) \\ &\quad + \cos. a\,(\sin. a + \sin. 2a + \ldots + \sin.(n-1)a.) \\ &= \sin. a\,(S' - \cos. na) + \cos. a\,(S - \sin. na). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S' &= 1 + \cos. a\,(1 + \cos. a + \cos. 2a + \ldots + \cos.(n-1)a) \\ &\quad - \sin. a\,(\sin. a + \sin. 2a + \ldots + \sin.(n-1)a) \\ &= 1 + \cos. a\,(S' - \cos. na) - \sin. a\,(S - \sin. na). \end{aligned}$$

De là, on a les deux équations

$$S' \sin. \tfrac{1}{2}a \cos. \tfrac{1}{2}a - S \sin.^2 \tfrac{1}{2}a = \sin. \tfrac{n+1}{2}a \cos. \tfrac{n+1}{2}a$$

$$S' \sin.^2 \tfrac{1}{2}a + S \sin. \tfrac{1}{2}a \cos. \tfrac{1}{2}a = \sin.^2 \tfrac{n+1}{2}a$$

ou,
$$S' \cos. \tfrac{1}{2}a - S \sin. \tfrac{1}{2}a = \frac{\sin. \frac{n+1}{2}a \cos. \frac{n+1}{2}a}{\sin. \frac{1}{2}a}$$

$$S' \sin. \tfrac{1}{2}a + S \cos. \tfrac{1}{2}a = \frac{\sin.^2 \frac{n+1}{2}a}{\sin. \frac{1}{2}a}$$

De là ; $S' = \dfrac{\sin. \frac{n+1}{2}a \cos. \frac{n}{2}a}{\sin. \frac{1}{2}a}$; $S = \dfrac{\sin. \frac{n+1}{2}a \sin. \frac{n}{2}a}{\sin. \frac{1}{2}a}$.

Remarque 1.re On a coutume d'exécuter les sommations précédentes, en présentant les cosinus et les sinus des arcs multiples, sous la forme de la somme et de la différence des puissances semblables de fonctions imaginaires du cosinus et du sinus de l'arc simple ; d'après les formules

$$\cos. na = \frac{(\cos. a + \sin. a\sqrt{-1})^n + (\cos. a - \sin. a\sqrt{-1})^n}{2}$$

$$\sin. na = \frac{(\cos. a + \sin. a\sqrt{-1})^n - (\cos. a - \sin. a\sqrt{-1})^n}{2\sqrt{-1}}$$; ce qui ramène les sommations proposées à des sommations de progressions géométriques. Le procédé que j'ai suivi me paroît plus lumineux. On peut vérifier les formules obtenues, en prouvant que si elles sont vraies pour une certaine valeur entière et positive de n, elles sont aussi vraies pour une valeur de n supérieure d'une unité ; et partant, pour toutes les valeurs supérieures de n.

Remarque 2.e Soit 2π la quantité angulaire autour d'un point sur un plan ; S' évanouit, lorsque $\frac{n+1}{2}a = \pi$; ou $\frac{n+1}{2}a = m\pi$; m étant un nombre entier quelconque ;

quelconque; à moins qu'on n'ait en même tems $\frac{1}{2}a=\pi$, ou $\frac{1}{2}a=m'\pi$; dans lequel cas, $S'=\frac{m}{m'}\cos.\frac{n}{2}a$. S' évanouit aussi, lorsque $\frac{n}{2}a=\frac{1}{2}\pi$, ou $\frac{n}{2}a=m\times\frac{1}{2}\pi$.

Item, S évanouit lorsque $\frac{n+1}{2}a=m\pi$, ou $\frac{n}{2}a=m\pi$.

Application. Soit un polygone régulier dont le nombre des côtés est n. L'angle au centre de ce polygone vaut $\frac{2\pi}{n}$; soit cet angle a. Par le centre du polygone soient menées des parallèles à ses côtés. Que l'une de ces parallèles soit prise pour axe des abscisses, et soient x et y les coordonnées d'un point depuis lequel on abaisse des perpendiculaires sur les côtés du polygone et sur leurs parallèles. Les perpendiculaires abaissées sur les parallèles successives, sont, y, $y\cos.a+x\sin.a$, $y\cos.2a+x\sin.2a$ .... $y\cos.(n-1)a+x\sin.(n-1)a$.

Les perpendiculaires abaissées sur les côtés successifs sont,
$r-y$, $r-(y\cos.a+x\sin.a)$, $r-(y\cos.2a+x\sin.2a)$.... $r-(y\cos.(n-1)a+x\sin.(n-1)a)$.

Dans l'expression de la somme des carrés de ces dernières perpendiculaires on obtient

coefficient de $rr....n$.

$$\text{coefficient de } 2ry...-(1+\cos.a+\cos.2a+....+\cos.(n-1)a)=-\frac{\sin.\frac{n}{2}a\cos.\frac{n-1}{2}a}{\sin.\frac{1}{2}a}$$

$$....2rx...-(\sin.a+\sin.2a+....+\sin.(n-1)a)=-\frac{\sin.\frac{n}{2}a\sin.\frac{n-1}{2}a}{\sin.\frac{1}{2}a}$$

$$.....yy...(1+\cos.^2a+\cos.^2 2a+....+\cos.^2(n-1)a)$$
$$=\tfrac{1}{2}n+\frac{1+\cos.2a+\cos.4a+....+\cos.2(n-1)a}{2}=\tfrac{1}{2}n+\frac{\sin.na\cos.(n-1)a}{2\sin.a}$$

$$.....xy...\sin.2a+\sin.4a+....+\sin.2(n-1)a=\frac{\sin.na\sin.(n-1)a}{\sin.a}$$

$$.....xx.....\sin.^2a+\sin^2 2a+....+\sin.^2(n-1)a$$
$$=\tfrac{1}{2}n-\frac{1+\cos.2a+\cos.4a+....+\cos.2(n-1)a}{2}=\tfrac{1}{2}n-\frac{\sin.na\cos.(n-1)a}{2\sin.a}$$

Soit $na=2\pi$; la somme des carrés de toutes les perpendiculaires abaissées sur les côtés est, $nrr+\frac{1}{2}nyy+\frac{1}{2}nxx$; et on a l'équation au cercle,
$S=nrr+\frac{1}{2}n(xx+yy)$; conformément au § 56.

§ 81.

Je vais étendre cette recherche à celle de la somme des cubes des perpen-

diculaires abaissées sur les côtés d'un polygone régulier, depuis un point pris dans l'intérieur de ce polygone.

Lemme. $4\sin.^3 a = 3\sin. a - \sin. 3a$. $4\sin.^2 a \cos. a = \cos. a - \cos. 3a$.

$4\cos.^3 a = 3\cos. a + \cos. 3a$. $4\sin. a \cos.^2 a = \sin. a + \sin. 3a$.

Tout étant admis comme dans le § précédent, quant aux expressions des perpendiculaires abaissées sur les côtés successifs ; on obtient dans l'expression de la somme des cubes de ces perpendiculaires les termes suivans.

coefficient de $r^3 \ldots . n$

$\ldots\ldots 3rry \ldots -(1+\cos.a+\cos.2a+\ldots.+\cos.(n-1)a) = \dfrac{\sin.\frac{n}{2}a \cos.\frac{n-1}{2}a}{\sin.\frac{1}{2}a}$

$\ldots\ldots 3rrx \ldots -(\sin.a+\sin.2a+\ldots.+\sin.(n-1)a) = \dfrac{\sin.\frac{n}{2}a \sin.\frac{n-1}{2}a}{\sin.\frac{1}{2}a}$

$\ldots\ldots 3ryy \ldots +(1+\cos.^2 a+\cos.^2 2a+\ldots+\cos.^2(n-1)a = \frac{1}{2}n + \dfrac{\sin. na \cos.(n-1)a}{2\sin. a}$

$\ldots\ldots 3rxy \ldots +(\sin. 2a+\sin. 4a+\ldots+\sin. 2(n-1)a) = \dfrac{\sin. na \sin.(n-1)a}{\sin. a}$

$\ldots\ldots 3rxx \ldots +(\sin.^2 a+\sin.^2 2a+\ldots+\sin.^2(n-1)a = \frac{1}{2}n - \dfrac{\sin. na \sin.(n-1)a}{2\sin. a}$

$\ldots\ldots y^3 \ldots -(1+\cos.^3 a+\cos.^3 2a+\ldots.+\cos.^3(n-1)a)$

$= -\frac{3}{4}(1+\cos. a+\cos. 2a+\ldots.+\cos.(n-1)a) = -\frac{3}{4}\dfrac{\sin.\frac{n}{2}a \cos.\frac{n-1}{2}a}{\sin.\frac{1}{2}a}$

$-\frac{1}{4}(1+\cos. 3a+\cos. 6a+\ldots.+\cos. 3(n-1)a = -\frac{1}{4}\dfrac{\sin.\frac{3n}{2}a \cos.\frac{3n-3}{2}a}{\sin.\frac{3}{2}a}$

$\ldots\ldots 3yyx \ldots -(\cos.^2 a \sin. a+\cos.^2 2a \sin. 2a \ldots . \cos.^2(n-1)a \sin.(n-1)a)$

$= -\frac{1}{4}(\sin. a+\sin. 2a+\ldots.+\sin.(n-1)a) = -\frac{1}{4}\dfrac{\sin.\frac{n}{2}a \sin.\frac{n-1}{2}a}{\sin.\frac{1}{2}a}$

$-\frac{1}{4}(\sin. 3a+\sin. 6a+\ldots.+\sin. 3(n-1)a) = -\frac{1}{4}\dfrac{\sin.\frac{3n}{2}a \sin.\frac{3n-3}{2}a}{\sin.\frac{3}{2}a}$

$\ldots\ldots 3yxx \ldots -(\cos. a \sin.^2 a+\cos. 2a \sin.^2 2a+\ldots.+\cos.(n-1)a \sin.^2(n-1)a)$

$= -\frac{1}{4}(\cos. a+\cos. 2a+\ldots.+\cos.(n-1)a = -\frac{1}{4}\dfrac{\sin.\frac{n}{2}a \cos.\frac{n-1}{2}a}{\sin.\frac{1}{2}a}$

$+\frac{1}{4}(\cos. 3a+\cos. 6a+\ldots.+\cos. 3(n-1)a = +\frac{1}{4}\dfrac{\sin.\frac{3n}{2}a \cos.\frac{3(n-1)}{2}a}{\sin.\frac{3}{2}a}$

$$\therefore\ x^3\ldots = -(\sin.^3 a + \sin.^3 2a + \ldots + \sin.^3(n-1)\,a$$

$$\ldots = -\tfrac{3}{4}(\sin. a + \sin. 2a + \ldots + \sin.(n-1)\,a = -\tfrac{3}{4}\frac{\sin.\frac{n}{2}a \sin.\frac{n-1}{2}a}{\sin.\frac{1}{2}a}$$

$$\ldots + \tfrac{1}{4}(\sin. 3a + \sin. 6a + \ldots + \sin. 3(n-1)\,a = -\tfrac{1}{4}\frac{\sin.\frac{3n}{2}a \sin.\frac{3(n-1)}{2}a}{\sin.\frac{3}{2}a}$$

Soit $n > 3$, ou que le polygone proposé ait un nombre de côtés plus grand que trois. La somme proposée est réduite aux trois termes $nr^3 + \frac{3}{2}nryy + \frac{3}{2}nrxx$; partant, on a l'équation au cercle, $2nr^3 + 3nr(xx+yy) = 2S$.

Partant, un polygone régulier d'un nombre de côtés plus grand que trois étant proposé; si d'un point pris dans l'intérieur de ce polygone on abaisse sur ses côtés des perpendiculaires, le double de la somme de leurs cubes est composé, du cube du rayon du cercle inscrit pris deux fois aussi souvent que le polygone a de côtés, et du solide de ce rayon par le carré de la distance de ce point au centre pris trois fois aussi souvent que le polygone a de côtés.

Lorsque le nombre des côtés du polygone est 3, $\frac{3}{2}a = \pi$; et $\frac{3n}{2}a = 3\pi$; la fraction $\frac{\sin.\frac{3n}{2}a}{\sin.\frac{3}{2}a} = \frac{0}{0}$ devient 3; partant, l'expression du double de la somme des cubes des perpendiculaires devient $3r^3 + 9r(xx+yy) - \frac{3}{2}y^3 + \frac{9}{2}yxx$; et le lieu proposé cesse pour ce cas seulement d'être une circonférence de cercle.

Je crois devoir éclaircir ce résultat remarquable du calcul par des considérations géométriques.

Lorsque le nombre des côtés du polygone régulier proposé est pair, la proposition relative à la somme des cubes est très-aisément ramenée à la proposition relative à la somme des carrés. En effet, la somme des cubes des perpendiculaires abaissées sur deux côtés opposés (qui sont parallèles) est composée du double du cube du rayon du cercle inscrit au polygone, et de six fois le produit du rayon par le carré de la perpendiculaire abaissée du même point sur la droite menée par le centre parallèle à ces côtés, conformément à la formule $(a+b)^3 + (a-b)^3 = 2a(aa+3bb)$. Mais, cette réduction ne se présente pas d'une manière aussi simple lorsque le nombre des côtés est impair.

Soient SA, SA′, SA″, SA‴.... SA^{n-1}, des droites données de position, dont le nombre est n, qui se coupent en un même point S, et qui partagent l'espace autour de ce point en parties égales. Sur une de ces droites SA, soient faits les angles ASa′, ASa″, ASa‴.... ASa^{n-1} respectivement triples des angles ASA′, ASA″, ASA‴.... ASA^{n-1}. Fig. 51.

Que le nombre n soit de l'une des deux formes $3n \pm 1$; les droites SA, Sa′, Sa″, Sa‴.... Sa^{n-1} partagent aussi la quantité angulaire autour du point S, en parties égales, et en même nombre que le premier. Que le nombre des droites proposées soit trois, les droites Sa′, Sa″, conviennent chacune avec la droite SA; et si le nombre n est un multiple de trois, les droites Sa′, Sa″... Sa^{n-1}, épuisent trois fois la quantité angulaire autour du point S; de manière que trois d'entr'elles coïncident avec l'une des droites données de position.

Soit Y un point duquel on abaisse sur les droites données de position des perpendiculaires YX, YX′, YX″, YX‴.... YX^{n-1}. Les expressions de ces perpendiculaires sont,

SY *sin.* YSA, SY *sin.* YSA′, SY sin. YSA″, SY sin. YSA‴.... SY sin. YSA^{n-1} ; et les expressions de leurs cubes sont,

SY^3 (3 sin. YSA — sin. 3YSA)

SY^3 (3 sin. YSA′ — sin. 3YSA′)

SY^3 (3 sin. YSA″ — sin. 3YSA″)

SY^3 (3 sin. YSA^{n-1} — sin. 3 YSA^{n-1}).

Que les droites SA, SA′, SA″, SA‴.... SA^{n-1}

et Sa′, Sa″, Sa‴.... Sa^{n-1} soient prises toutes égales à SY; soit conçu l'angle ASy triple de l'angle ASY. Des points A, A′, A″.... A^{n-1} soient abaissées sur SY les perpendiculaires AZ, A′Z′, A″Z″.... $A^{n-1}Z^{n-1}$; et des points A, a′, a″.... a^{n-1}, soient abaissées sur Sy les perpendiculaires Az, a′z′, a″z″.... $a^{n-1}z^{n-1}$.

La somme des cubes des perpendiculaires abaissées du point Y sur les droites données est $3SY^n (AZ + A'Z' + A''Z'' + ... + A^{n-1}Z^{n-1})$

$- SY^3 (Az + a'z' + a''z'' + ... + a^{n-1}z^{n-1})$.

Or, lorsque le nombre des droites proposées est différent de trois; le point S est le centre des moyennes distances tant des points A, A′, A″.... A^{n-1} que des points A, a′, a″.... a^{n-1}; et partant, chacune des deux sommes

$AZ + A'Z' + A''Z'' + ... + A^{n-1}Z^{n-1}$,

$Az + a'z' + a''z'' + ... + a^{n-1}z^{n-1}$ est zéro. Donc, lorsque n est différent de trois, la somme des cubes des perpendiculaires proposées est zéro.

Mais, lorsque le nombre proposé des droites est trois, les points A, a′, a″ coïncident, et la somme proposée des cubes devient $-SY^3 \times Az$ $= -SY^n \times SY \sin. 3ASY = -SY^3 \sin. 3ASY = -SY^3 (3 \sin. ASY - 4 \sin.^3 ASY)$.

Il est aisé de passer du cas des droites qui font autour du point S des angles égaux, au cas du polygone aux côtés duquel ces droites sont parallèles.

En

En effet, appelant r le rayon du cercle inscrit ; les perpendiculaires abaissées sur les côtés sont successivement $r-YX$, $r-YX'$, $r-YX''$, $r-YX'''\ldots$, $r-YX^{n-1}$; et la somme des cubes de ces perpendiculaires est

$$nr^3 - 3rr\,f.\,X^{n-1}Y + 3r\,f.\,X^{n-1}Y^2 - f.\,X^{n-1}Y^3.$$

Dans tous les cas, $f.\,X^{n-1}Y$ est zéro (§ 7). Lorsque n est différent de trois $f.\,X^{n-1}Y^3$ est aussi zéro. Partant, la somme proposée des cubes est $nr^3 + 3r\,f.\,X^{n-1}Y^2$. Soit $n=3$, cette somme est

$$3r^3 + 3r\,f.\,X^{n-1}Y^2 + SY^3 \sin.\,3ASY.$$
$$= 3r^3 + 3r\,f.\,X^{n-1}Y^2 + SY^3(3\sin.\,ASY - 4\sin.^3 ASY).$$

§ 82.

Problème. Soient des droites qui se coupent en un même point sur un plan ; de différens points de ce plan soient abaissées sur ces droites des perpendiculaires ; et soit prise la somme des carrés de ces perpendiculaires. Que pour chacun de ces points la somme de ces carrés soit constante. On demande de déterminer les cas dans lesquels le lieu de ces points est la circonférence d'un cercle.

Que le point de section des droites données de position soit pris pour l'origine des coordonnées. Que les équations des droites données de position soient

$$x\cos.\,\alpha + y\sin.\,\alpha = 0$$
$$x\cos.\,\alpha' + y\sin.\,\alpha' = 0$$
$$x\cos.\,\alpha'' + y\sin.\,\alpha'' = 0$$

$$x\cos.\,\alpha^N + y\sin.\,\alpha^N = 0.$$

Soit S l'espace donné de grandeur.

Soient x et y les coordonnées d'un des points dont le lieu est cherché.

La somme des carrés des perpendiculaires abaissées du point xy sur les droites données de position est $xx\,f.\cos.^2\alpha^N + 2xy\,f.\cos.\alpha^N \times \sin.\alpha^N + yy\,f.\sin.^2\alpha^N = S$. Pour que cette équation soit celle de la circonférence d'un cercle, on doit avoir les deux équations de condition $f.\cos.\alpha^N \sin.\alpha^N = 0$; $f.\cos.^2\alpha^N = f.\sin.^2\alpha^N$.

Alors, $(xx+yy)\,f.\cos.^2\alpha^N = S$; $xx+yy = \frac{S}{f.\cos.^2\alpha^N}$. Cette équation est celle de la circonférence d'un cercle, qui a pour centre le point de section des droites données de position, et dont le carré du rayon est $\frac{S}{f.\cos.^2\alpha^N}$. Il est facile de montrer que les deux équations de condition sont remplies en particulier

lorsque les droites données de position coupent en parties égales la quantité angulaire autour d'un point sur un plan; et partant, dans ce cas, le lieu des points xy est la circonférence d'un cercle (Voy. le § 55).

Aux carrés des perpendiculaires soient substitués les espaces qui ont à ces carrés des rapports donnés dont les exposans sont, m, m', m'', m'''.... m^n, respectivement. On a de même l'équation,

$xx\,f.\,m^n\,cos.^2\,\alpha^n + 2xy\,f.\,m^n\,cos.\,\alpha^n\,sin.\,\alpha^n + yy\,f.\,m^n\,sin.^2\,\alpha^n = S$. Pour que le lieu des points xy soit une circonférence de cercle, on doit avoir les deux équations de condition; $f.\,m^n\,cos.\,\alpha^n\,sin.\,\alpha^n = o$

$$f.\,m^n\,cos.^2\,\alpha^n = f.\,m^n\,sin.^2\,\alpha^n;$$

l'équation proposée devient $(xx + yy)\,f.\,m^n\,cos.^2\,\alpha^n = S$.

§ 83.

Problème. Soient des droites (non parallèles entr'elles et qui ne se coupent pas toutes en un même point) données de position sur un plan. De différens points de ce plan soient abaissées sur ces droites des perpendiculaires. Soit prise la somme des carrés des perpendiculaires répondant à un même point; et que cette somme soit égale à un espace S donné de grandeur. On demande dans quels cas le lieu de ces points est la circonférence d'un cercle.

Que les équations des droites données de position soient

$$x\,cos.\,\alpha + y\,sin.\,\alpha = d$$
$$x\,cos.\,\alpha' + y\,sin.\,\alpha' = d'$$
$$x\,cos.\,\alpha'' + y\,sin.\,\alpha'' = d''$$

$$x\,cos.\,\alpha^n + y\,sin.\,\alpha^n = d^n.$$

Soient x et y les coordonnées du point depuis lequel on abaisse des perpendiculaires sur les droites données. Les expressions de ces perpendiculaires sont, $x\,cos.\,\alpha + y\,sin.\,\alpha - d$

$$x\,cos.\,\alpha' + y\,sin.\,\alpha' - d'$$
$$x\,cos.\,\alpha'' + y\,sin.\,\alpha'' - d''$$

$$x\,cos.\,\alpha^n + y\,sin.\,\alpha^n - d^n.$$

On a l'équation,

$$\begin{aligned} & xx\,f.\,cos.^2\,\alpha^n \\ & + 2xy\,f.\,cos.\,\alpha^n\,sin.\,\alpha^n \\ & - 2x\,f.\,d^n\,cos.\,\alpha^n \\ & + yy\,f.\,sin.^2\,\alpha^n \\ & - 2y\,f.\,d^n\,sin.\,\alpha^n \\ & + f.\,d^{n2}, \end{aligned} \quad = S.$$

Pour que cette équation soit celle de la circonférence d'un cercle, on doit avoir les deux équations de condition ; $f.\ cos.\ \alpha^N\ sin.\ \alpha^N = o$

$$f.\ cos.^2\ \alpha^N = f.\ sin.^2\ \alpha^N.$$

Alors, $(xx+yy)\ f.\ cos.^2\ \alpha^N - 2x f.\ d^N\ cos.\ \alpha^N - 2y f.\ d^N\ sin.\ \alpha^N + f.\ d^{N2} = S.$

ou, $(y - \frac{f.\ d^N\ sin.\ \alpha^N}{f.\ cos.^2\ \alpha^N})^2 + (x - \frac{f.\ d^N\ cos.\ \alpha^N}{f.\ cos.^2\ \alpha^N})^2 = \frac{S.f.\ d^{N2}}{f.\ cos.^2\ \alpha^N} + \frac{f.^2 d^N\ sin.\ \alpha^N + f.^2 d^N\ cos.\ \alpha^N}{f.^2\ cos.^2\ \alpha^N}.$

Cette équation (si elle est possible) est celle de la circonférence d'un cercle dont les coordonnées du centre sont, $\frac{f.\ d^N\ sin.\ \alpha^N}{f.\ cos.^2\ \alpha^N}$ et $\frac{f.\ d^N\ cos.\ \alpha^N}{f.\ cos.^2\ \alpha^N}$; et le carré de son rayon est $\frac{S - f.\ d^{N2}}{f.\ cos.^2\ \alpha^N} + \frac{f.^2\ d^N\ sin.\ \alpha^N + f.^2 d^N\ cos.\ \alpha^N}{f.^2\ cos.^2\ \alpha^N}$.

Dans les expressions précédentes, les quantités

$$\begin{matrix} d\ sin.\ \alpha & d'\ sin.\ \alpha' & d''\ sin.\ \alpha'' & \cdots & d^N\ sin.\ \alpha^N \\ d\ cos.\ \alpha' & d'\ cos.\ \alpha'' & d''\ cos.\ \alpha''' & \cdots & d^N\ cos.\ \alpha^{N'} \end{matrix},$$

sont respectivement les perpendiculaires abaissées sur les axes depuis les pieds des perpendiculaires abaissées sur les droites données, depuis l'origine ; et les quantités $f.\ d^N\ sin.\ \alpha^N$, $f.\ d^N\ cos.\ \alpha^N$, sont entr'elles comme les perpendiculaires abaissées sur les mêmes axes depuis le centre des moyennes distances des pieds des premières perpendiculaires.

Les équations de condition qui satisfont au cas où les droites données de position se coupent en un même point, sont aussi celles qui satisfont au cas où les droites données de position forment un polygone dont les côtés sont respectivement parallèles aux premières.

Il est aisé de montrer que ces équations de condition ont lieu lorsque le polygone proposé est régulier (Voy. § 56).

Aux carrés des perpendiculaires soient substitués les espaces qui ont à ces carrés des rapports donnés, dont les exposans sont m, m', m''.... m^N; on a de même l'équation,

$$\begin{aligned} & xx\ f.\ m^N\ cos.^2\ \alpha^N \\ & + 2xy\ f.\ m^N\ cos.\ \alpha^N\ sin.\ \alpha^N \\ & - 2x\ f.\ m^N\ d^N\ cos.\ \alpha^N \\ & + yy\ f.\ m^N\ sin.^2\ \alpha^N \\ & - 2y\ f.\ m^N\ d^N\ sin.\ \alpha^N \\ & + f.\ m^N\ d^{N2}. \end{aligned} = S.$$

Pour que cette équation soit celle de la circonférence d'un cercle, on doit avoir les deux équations de condition $f.\ m^N\ cos.^2\ \alpha^N = f.\ m^N\ sin.^2\ \alpha^N$

$$\text{et } f.\ m^N\ cos.\ \alpha^N\ sin.\ \alpha^N = o;$$

ainsi que dans le § précédent. Partant, les équations de condition qui satisfont

au cas où les droites données de position partent d'un même point, satisfont aussi au cas où les droites données de position forment un polygone dont les côtés sont parallèles aux premières.

Exercice proposé. Soit un polygone donné de grandeur et d'espèce. D'un point pris en dedans du polygone soient abaissées sur ses côtés des perpendiculaires; et soit prise la somme des cubes de ces perpendiculaires. Que cette somme soit constante et égale à un solide donné de grandeur. On demande quelles sont les conditions requises pour que les points depuis lesquels les perpendiculaires sont abaissées soient à la circonférence d'un cercle.

§ 84.

Problème. Soit un quadrilatère donné de grandeur et d'espèce. De différens points pris sur le plan de ce quadrilatère soient abaissées sur ses côtés des perpendiculaires. Soit pris d'une part le rectangle des perpendiculaires abaissées sur deux des côtés opposés, et de l'autre part le rectangle des perpendiculaires abaissées sur les deux autres côtés. Que le rapport de ces deux rectangles soit donné. On demande de déterminer les cas dans lesquels le lieu des points depuis lesquels les perpendiculaires sont abaissées est la circonférence d'un cercle.

Que les équations des droites données de position ou des côtés du quadrilatère soient, $x \cos. \alpha + y \sin. \alpha = d$

$$x \cos. \alpha' + y \sin. \alpha' = d'$$
$$x \cos. \alpha'' + y \sin. \alpha'' = d'$$
$$x \cos. \alpha''' + y \sin. \alpha''' = d''.$$

Que le rapport du rectangle de la première et de la troisième de ces perpendiculaires au rectangle de la seconde et de la quatrième, soit égal au rapport de p à p',

Soient x et y les coordonnées d'un des points dont le lieu est proposé.

Les perpendiculaires abaissées du point xy sur les droites données sont respectivement $x \cos. \alpha + y \sin. \alpha - d$

$$x \cos. \alpha' + y \sin. \alpha' - d'$$
$$x \cos. \alpha'' + y \sin. \alpha'' - d'$$
$$x \cos. \alpha''' + y \sin. \alpha''' - d''$$

Les

Les rectangles proposés sont respectivement

$xx \cos.\alpha \cos.\alpha''$	$xx \cos.\alpha' \cos.\alpha'''$
$+xy \sin.(\alpha''+\alpha)$	$+xy \sin.(\alpha'''+\alpha')$
$-x(d' \cos.\alpha + d \cos.\alpha'')$	$-x(d'' \cos.\alpha' + d' \cos.\alpha''')$
$+yy \sin.\alpha \sin.\alpha''$	$+yy \sin.\alpha' \sin.\alpha'''$
$-y(d' \sin.\alpha + d \sin.\alpha'')$	$-y(d'' \sin.\alpha' + d' \sin.\alpha''')$
$+dd'$	$+d'd''.$

On a l'équation :

$$yy\left(\frac{\sin.\alpha \sin.\alpha''}{p} - \frac{\sin.\alpha' \sin.\alpha'''}{p'}\right)$$
$$+xy\left(\frac{\sin.(\alpha''+\alpha)}{p} - \frac{\sin.(\alpha'''+\alpha')}{p'}\right)$$
$$-y\left(\frac{d'' \sin.\alpha + d \sin.\alpha''}{p} - \frac{d'' \sin.\alpha' + d' \sin.\alpha'''}{p'}\right)$$
$$+xx\left(\frac{\cos.\alpha \cos.\alpha''}{p} - \frac{\cos.\alpha' \cos.\alpha'''}{p'}\right)$$
$$-x\left(\frac{d' \cos.\alpha + d \cos.\alpha''}{p} - \frac{d'' \cos.\alpha' + d' \cos.\alpha'''}{p'}\right)$$
$$+\left(\frac{dd'}{p} - \frac{d'd''}{p'}\right) = 0.$$

Pour que cette équation soit celle de la circonférence d'un cercle, on doit avoir les deux équations de condition

$$\frac{\sin.(\alpha''+\alpha)}{p} - \frac{\sin.(\alpha'''+\alpha')}{p'} = 0;$$

$$\frac{\sin.\alpha \sin.\alpha''}{p} - \frac{\sin.\alpha' \sin.\alpha'''}{p'} = \frac{\cos.\alpha \cos.\alpha'}{p} - \frac{\cos.\alpha' \cos.\alpha'''}{p'}$$

ou, $$\frac{\sin.(\alpha''+\alpha)}{p} = \frac{\sin.(\alpha'''+\alpha')}{p'}$$

$$\frac{\cos.(\alpha+\alpha'')}{p} = \frac{\cos.(\alpha'+\alpha''')}{p'}.$$

Puisque $\sin.(\alpha+\alpha'') = \frac{p}{p'} \sin.(\alpha'+\alpha''')$

$$\sin.^2(\alpha+\alpha'') = \frac{pp}{p'p'} \sin.^2(\alpha'+\alpha''').$$

Item, puisque $\cos.(\alpha+\alpha'') = \frac{p}{p'} \cos.(\alpha'+\alpha''')$

$$\cos.^2(\alpha+\alpha'') = \frac{pp}{p'p'} \cos.^2(\alpha'+\alpha''').$$

Donc, $1=\cos.^2(\alpha+\alpha'')+\sin.^2(\alpha+\alpha'')=\frac{pp}{p'p}(\cos.^2(\alpha'+\alpha''')+\sin.^2(\alpha'+\alpha'''))=\frac{pp}{p'p'}$; donc, $p=p'$. De là, les coefficiens de yy et de xx deviennent *sin. α sin. α'' — sin. α' sin. α'''* et *cos. α cos. α'' — cos. α' cos. α'''*; et pour que ces coefficiens soient égaux entr'eux, on doit avoir *cos.* $(\alpha+\alpha'')=$ *cos.* $(\alpha'+\alpha''')$, et $\alpha+\alpha''=\alpha'+\alpha'''$; ou $\alpha+\alpha''=4D-(\alpha'+\alpha''')$.

Cela a lieu pour les quadrilatères inscrits au cercle. Savoir, si d'un point de la circonférence on mène des droites perpendiculaires aux côtés de ce quadrilatère, les rectangles des perpendiculaires abaissées sur les côtés opposés sont égaux entr'eux. Il est facile de montrer cette propriété du cercle par des considérations purement géométriques.

CHAPITRE TROISIÈME.

Lieux au plan et à la surface sphérique, traités géométriquement.

LE plus grand nombre des propriétés locales de la ligne droite et de la circonférence du cercle développées dans les deux premiers chapitres de cet Ouvrage, et relatives à des points et à des lignes situés sur un même plan, ont leurs correspondantes pour la surface plane et pour la surface sphérique, relativement à des étendues situées dans l'espace et dans des plans différens. L'exposition de cette correspondance fera l'objet de ce troisième chapitre.

§ 85.

Définition. Lorsque tous les points d'une surface jouissent d'une certaine propriété, et qu'aucun point hors de cette surface ne jouit de la même propriété, cette surface est le *lieu* des points qui jouissent de cette propriété.

Je vais éclaircir cette définition par quelques exemples simples, qui découlent immédiatement de la notion du plan et de celle de la surface sphérique.

Lorsque deux plans sont parallèles entr'eux, leur distance est constante. Partant, une surface plane est le lieu des points dont la distance à un plan donné est constante.

Lorsqu'une droite est perpendiculaire à un plan, elle est perpendiculaire à chacune des droites menées par son pied dans ce plan. Partant, une surface plane est le lieu des droites perpendiculaires à une même droite, et élevées d'un même point de cette droite.

Digitized by Google

Soient deux plans qui se coupent. Le plan qui divise en deux parties égales l'angle de ces plans (que j'appelle *angle planique*), a chacun de ses points également éloigné de ces deux plans, et aucun point hors de ce plan ne jouit de la même propriété. Partant, une surface plane est le lieu des points également éluignés de deux plans qui se coupent. Comme deux plans qui se coupent font entr'eux deux angles supplémens l'un de l'autre, il y a deux plans qui jouissent de cette propriété. Si les plans proposés sont parallèles entr'eux, une surface plane est aussi le lieu des points également éloignés d'eux.

Par le milieu d'une droite soit mené un plan perpendiculaire à cette droite. Toute droite menée dans ce plan par le milieu de la première droite, est perpendiculaire à cette droite, et chacun des points de la droite menée est également éloigné des extrémités de cette droite. Partant, une surface plane est le lieu des points dans l'espace également éloignés de deux points donnés.

Soient deux plans qui se coupent donnés de position. D'un point quelconque d'un de ces plans soient abaissées des perpendiculaires tant sur la commune section des deux plans que sur le second plan. Le rapport de ces deux perpendiculaires est constant (celui du sinus total au sinus de l'angle planique). Partant, un plan étant donné de position, et une droite tracée sur ce plan étant aussi donnée de position, une surface plane est le lieu des points tels que le rapport de leurs distances à cette droite et à ce plan est toujours le même.

Soient trois plans qui se coupent dans une même ligne droite. D'un point quelconque de l'un de ces plans soient abaissées sur les deux autres des perpendiculaires; le rapport de ces perpendiculaires est toujours le même (savoir, celui des sinus des angles planiques de ce plan avec les deux autres). Partant, une surface plane est le lieu des points tels que le rapport de leurs distances à deux plans qui se coupent donnés de position est toujours le même.

La surface de la sphère est le lieu des points dont la distance à un même point est toujours la même.

Soient trois plans perpendiculaires entr'eux passant par le centre d'une sphère. D'un point quelconque de la surface sphérique soient abaissées sur ces plans des perpendiculaires. La somme des carrés de ces perpendiculaires est constamment égale au carré du rayon. Partant, la surface de la sphère est le lieu des points tels que la somme des carrés de leurs distances à trois plans donnés de position perpendiculaires entr'eux est constante.

§. 86.

Puisque la commune section de deux plans est une ligne droite, et que la

commune section d'un plan et d'une surface sphérique et celle de deux surfaces sphériques, sont des circonférences de cercle ; les propriétés locales du plan et de la surface sphérique peuvent servir à déterminer des propriétés locales de la ligne droite et de la circonférence du cercle, considérées dans l'espace. Je vais éclaircir cette correspondance par quelques exemples.

Soient trois points (non situés sur une même droite), donnés de position dans l'espace, et qu'on demande le lieu des points également éloignés de ces trois points. Ce lieu est la commune section des plans qui jouissent de la propriété proposée relativement à ces points pris deux à deux ; et partant, ce lieu est une ligne droite. Cette droite est la perpendiculaire au plan qui passe par ces points, élevée depuis le point de ce plan également éloigné de ces trois points ; ou depuis le centre du cercle dont la circonférence passe par ces trois points.

Soient trois plans qui se coupent (non dans une même droite) donnés de position dans l'espace. Le lieu des points également éloignés de ces trois plans, est la commune section des plans qui jouissent de cette propriété relativement à ces plans pris deux à deux ; et partant, une ligne droite est le lieu des points également éloignés de trois plans donnés (qui se coupent). Généralement, une ligne droite est le lieu des points tels que les rapports de leurs distances à trois plans qui se coupent, donnés de position, sont toujours les mêmes.

Lorsque deux sphères se coupent, la circonférence qui est la commune section de leurs surfaces est le lieu des points dans l'espace dont les distances aux centres de ces sphères sont respectivement égales à leurs rayons.

Les points dans l'espace dont la distance à un point donné est donnée, et dont la distance à un plan donné est aussi donnée (s'ils peuvent être déterminés), sont à la circonférence du cercle, qui est la commune section de la surface sphérique et du plan qui sont les lieux des points dont les distances au point donné et au plan donné sont données.

De même la circonférence d'un cercle est (s'il est possible) le lieu des points dont la distance à un point donné est donnée, et dont le rapport des distances à deux plans donnés est aussi donnée.

§ 87.

Le plus grand nombre des lieux à la ligne droite et à la circonférence du cercle qui ont fait l'objet des recherches précédentes, se convertissent avec facilité en lieux aux plans et à la surface sphérique, par la simple substitution de ces derniers aux premiers. Je vais en donner plusieurs exemples.

Soit

Soit un point donné de position. Par ce point soient menées différentes droites, sur chacune desquelles soient prises depuis ce point des parties qui soient entr'elles dans un rapport donné. Que l'extrémité d'une de ces parties soit à un plan donné de position ; l'extrémité de l'autre partie est aussi à un plan donné de position. Que l'extrémité d'une de ces parties soit à une surface sphérique donnée, l'extrémité de l'autre partie est aussi à une surface sphérique donnée (Voyez §§ 28 et 29).

Item. Que le rectangle de ces parties soit donné. Si le point donné est sur une surface sphérique donnée, et si l'extrémité de la première partie est sur cette surface sphérique, l'extrémité de la seconde partie est à un plan donné. Que le point donné ne soit pas sur une surface sphérique donnée ; que la première partie soit terminée à une surface sphérique donnée, la seconde partie est aussi terminée à une surface sphérique donnée ; enfin, que l'extrémité de la première partie soit à un plan donné, l'extrémité de la seconde partie est à une surface sphérique donnée (Voyez §§ 30 et 31).

Soient trois plans qui se coupent en une même droite donnés de position. Soit une droite qui coupe ces plans, coupée harmoniquement, de manière que trois des extrémités de la ligne et de ses parties soient aux plans donnés de position ; la quatrième de ces extrémités est aussi à un plan donné de position (Voyez § 47),

Un des quatre points de la section harmonique étant donné, si deux des trois autres points sont à une surface sphérique donnée, le quatrième de ces points est à un plan donné de position (Voyez § 48).

Soient deux points donnés de position. Une surface sphérique est le lieu des points tels que le rapport de leurs distances aux deux points donnés est un rapport donné différent du rapport d'égalité. Cette sphère est engendrée par la révolution d'un des demi-cercles dont la circonférence jouit de la propriété proposée, autour du diamètre qui passe par ces deux points (Voyez § 45).

On détermine de même la surface sphérique qui est le lieu des points tels que la somme des carrés de leurs distances à deux points donnés est toujours la même. Il en est de même pour la somme des espaces qui ont aux carrés des distances à ces deux points des rapports donnés ; et pour la différence des espaces qui ont aux carrés de ces distances des rapports donnés inégaux entr'eux (Voyez §§ 38 et 39). Il en est de même pour le cas où la somme ou la différence d'un de ces espaces et d'un espace donné, a un rapport donné à la somme ou à la différence de l'autre de ces espaces et d'un espace donné.

Un plan est le lieu des points tels que la différence des carrés de leurs distances à deux points donnés est toujours la même.

Soient un point et un plan donnés de position. D'un même point soient menées deux droites, l'une au point donné et l'autre perpendiculaire au plan donné. Que le carré de la première droite soit égal au rectangle de la seconde par une droite donnée de grandeur, le lieu des points est une surface sphérique. Réciproquement; que la première droite soit menée d'un point pris sur une surface sphérique; et que la seconde soit parallèle à une droite donnée de position, son extrémité est à un plan donné de position (Voyez § 44).

Soit un point donné de position dans l'intérieur d'une surface sphérique. Soient des plans passant par ce point, et sur les sections de la sphère par ces plans prises pour bases soient décrits des cônes droits qui touchent la surface sphérique. Les sommets de ces cônes sont à une surface plane donnée de position (Voyez § 50).

Les exemples précédens suffisent pour montrer la correspondance entre les lieux relatifs à des étendues situées dans un même plan, et ceux qui sont relatifs à des étendues prises dans l'espace. Les propositions correspondantes à celles qui sont contenues dans les §§ 35 et 36, 41 et 42 me paroissent demander un développement particulier.

§ 88.

Problème. Soient des droites qui se coupent en un même point données de position dans l'espace. Soient des droites correspondantes et en même nombre données de grandeur. On demande le lieu des points de chacun desquels abaissant sur les premières droites des perpendiculaires, la somme des rectangles des segmens qu'elles en retranchent, à compter depuis leur point de section, par les droites données de grandeur, soit donnée de grandeur.

Soient SA, SA', SA'', SA'''.... SA^{n-1}, SA^n, des droites qui se coupent en un même point S données de position dans l'espace. Soient m, m', m'', m'''... m^{n-1}, m^n, des droites correspondantes données de grandeur. D'un point Y soient abaissées sur les droites données de position les perpendiculaires YP, YP', YP'', YP'''.... YP^n. Soit la somme $m \times SP + m' \times SP' + m'' \times SP'' + m''' \times SP''' + ... + m^{n-1} \times SP^{n-1} + m^n \times SP^n$, égale à un espace S donné de grandeur. On demande le lieu des points Y.

Analyse. Sur les droites données de position soient portées depuis le point S les droites SA, SA', SA'', SA'''.... SA^{n-1}, SA^n, respectivement égales aux droites m, m', m'', m'''.... m^{n-1}, m^n. Soit menée SY, et les points

A, A', A'', A'''.... A^{n-1}, A^n; soient abaissées sur SY les perpendiculaires AQ, A'Q', A''Q'', A'''Q'''.... $A^{n-1}Q^{n-1}$, A^nQ^n.

Les triangles $\begin{matrix}ASQ\\YSP\end{matrix}$, $\begin{matrix}A'SQ'\\YSP'\end{matrix}$, $\begin{matrix}A''SQ''\\YSP''\end{matrix}$, $\begin{matrix}A'''SQ'''\\YSP'''\end{matrix}$.... $\begin{matrix}A^{n-1}SQ^{n-1}\\YSP^{n-1}\end{matrix}$, $\begin{matrix}A^nSQ^n\\YSP^n\end{matrix}$, sont semblables deux à deux. De là, les rectangles

$SA\times SP$, $SA'\times SP'$, $SA''\times SP''$, $SA'''\times SP'''$.... $SA^{n-1}\times SP^{n-1}$, $SA^n\times SP^n$,

$SY\times SQ$, $SY\times SQ'$, $SY\times SQ''$, $SY\times SQ'''$.... $SY\times SQ^{n-1}$, $SY\times SQ^n$,

sont égaux deux à deux; et partant, la somme S des premiers rectangles est égale au rectangle de SY par la somme $SQ+SQ'+SQ''+SQ'''....+SQ^{n-1}+SQ^n$. Soit $n+1$ le nombre des droites données de position, soit Z le centre des moyennes distances des points A, A', A'', A'''.... A^{n-1}, A^n; soit menée SZ; et du point Z soit abaissée sur SY la perpendiculaire ZV; soit aussi XY la perpendiculaire à SZ. On aura, $S=(n+1)SY\times SV=(n+1)SZ\times SX$. Donc, le rectangle $SZ\times SX$ est donné de grandeur; mais la droite SZ est donnée de grandeur; donc, la droite SX est donnée de grandeur et de position; donc, le lieu des points Y est une surface plane donnée de position, perpendiculaire à SZ, et élevée depuis le point X.

Construction. Sur les droites données de position soient portées des droites SA, SA', SA'', SA'''....SA^{n-1}, SA^n, respectivement égales aux droites données de grandeur m, m', m'', m'''.... m^{n-1}, m^n. Soit Z le centre des moyennes distances des points A, A', A'', A'''.... A^{n-1}, A^n. Soit divisé l'espace S en parties égales dont le nombre est égal à celui des droites données. Soit convertie une de ces parties en un rectangle ayant SZ pour un de ses côtés; soit porté l'autre côté sur SZ de S en X; et du point X soit élevé à SZ un plan perpendiculaire; il sera le lieu cherché des points Y.

Démonstration. Les triangles rectangles ZSV, YSX, sont semblables; de là, $SX\times SV=SZ\times SX$; et $(n+1)\,SY\times SV=S$.

Or, $(n+1)\,SV=SQ+SQ'+SQ''+SQ'''+....+SQ^{n-1}+SQ^n$; donc,

$S=SY\,(SQ+SQ'+SQ''+SQ'''+....+SQ^{n-1}+SQ^n)$.

$=SA\times SP+SA'\times SP'+SA''\times SP''+SA'''\times SP'''+....SA^{n-1}\times SP^{n-1}+SA^n\times SP^n$

$=m\times SP+m'\times SP'+m''\times SP''+m'''\times SP'''+....+m^{n-1}\times SP^{n-1}+m^n\times SP^n$.

Remarque 1.me Lorsque les points A, A', A''.... A^{n-1}, A^n, sont situés d'un même côté de quelque plan passant par S (ce qui a lieu lorsque chacun des angles formés par ces droites est plus petit que deux droits); le point Z est situé du même côté de ce plan; et il est en dedans de l'angle solide formé

en S, et dont les arrêtes sont SA, SA', SA''.... SA^{n-1}, SA^n; le point X est aussi dans cet angle, et le plan qui est le lieu des points Y coupe les arrêtes de cet angle solide du même côté de ce plan.

Mais lorsque les points A, A', A''.... A^{n-1}, A^n, sont situés des deux côtés de tout plan passant par S; le point Z peut convenir avec le point S; dans ce cas la question est indéterminée, et $f.\ m^n \times YP^n$ est déterminée à être zéro.

Lorsque cela a lieu, la question est relative à quelque différence des rectangles proposés; et les droites relatives aux termes du soustrahende doivent être portées dans une direction opposée à celle suivant laquelle elles auroient été portées, si la question eût été relative à une somme.

Remarque 2.° La valeur de SZ se détermine par l'équation $f.\ SA^{n2} = f.\ ZA^{n2} + (n+1)\,SZ^2$ (§§ 11 et 20), ou $(n+1) f.\ SA^{n2} = (n+1)\, f.\ ZA^{n2} + (n+1)^2\, SZ^2$.

Or, $(n+1) f.\ SA^{n2} = f.\ A^{n-1}\overline{A^n}^2$; donc, $(n+1) f.\ A^{n-1}\overline{A^n}^2 + (n+1)^2 SZ^2$.

$= n\, f.\ \overline{SA^n}^2 - 2\, f.\ SA^{n-1} \times SA^n \cos.\ A^{n-1}SA^n$.

Donc, $(n+1)^2 SZ^2 = f.\ \overline{SA^n}^2 + 2\, f.\ SA^{n-1} \times SA^n \cos.\ A^{n-1}SA^n$.

Savoir; le carré de la droite qui vaut SZ autant de fois qu'il y a de droites, est égal à la somme des carrés des droites SA.... SA^n; et du double de leurs rectangles deux à deux par les cosinus de leurs inclinaisons.

La position de SZ relativement à une des droites données de position, telle que SA se détermine par l'équation

$SA + SA' \cos.\ ASA' + SA'' \cos.\ ASA'' + \ldots + SA^n \cos.\ ASA^n = (n+1)\, SZ \cos.\ ASZ$,

et partant, $\cos.\ ASZ = \dfrac{f.\ SA^n \cos.\ ASA^n}{(n+1)\, SZ}$

§ 89.

Application. Soient des plans en nombre quelconque qui se coupent en un même point. D'un même point soient abaissées des perpendiculaires (dans une direction déterminée pour chacun d'eux) sur chacun de ces plans, et soit prise la somme des rectangles de ces perpendiculaires par des droites correspondantes données de grandeur. Que cette somme soit égale à un espace *S* donné de grandeur. Le lieu de ces points est un plan donné de position.

Que les perpendiculaires abaissées des points situés en dedans de l'angle solide renfermé entre ces plans soient, par exemple, regardées comme positives.

Du sommet de l'angle solide formé par les plans donnés de position, soient élevées à ces plans des perpendiculaires, toutes dirigées, par exemple, du dedans

dedsns au dehors de l'angle solide, ou du côté de chsque plan intérieur à l'sngle solide. Sur ces dernières droites soient sbaissées des perpendiculaires depuis chscun des points dont le lieu est proposé. Les segmens retranchés de ces droites, depuis le sommet commun, par les perpendiculaires abaissées sur elles, sont respectivement égaux aux perpendiculaires sbaissées sur les plans correspondans. Partant, la question proposée sur des plans qui se coupent en un même point, est ramenée à la question du § précédent sur des droites données de position qui se coupent en un même point; et partant, le lieu proposé est un plan donné de position.

Remarque 1.re *Porisme.* Soient des plans qui se coupent en un même point donnés de position dsns l'espace; soient des droites correspondantes et en même nombre données de grandeur. On peut déterminer en même tems la position d'un plan et la grandeur d'une droite, de manière à satisfaire à la condition suivante. D'un point de l'espace soient abaissées sur tous les plans des perpendiculsires; et soient pris les rectangles de ces perpendiculaires par les droites correspondantes données de grandeur. La somme (prise dans un sens général et algébrique) des premiers rectangles correspondans aux plans donnés de position et aux droites données de grandeur, sera égale au dernier rectangle correspondant au plan à déterminer de position et à la droite à déterminer de grandeur.

Remarque 2.e Tout ce qui a été dit dans les §§ 35 et 36 sur la correspondance des changemens de signe et des changemens de direction des perpendiculaires abaissées sur des droites données de position, doit s'appliquer à ces changemens relativement aux plans donnés de position.

§ 90.

Problème. Soit un polyhèdre donné de grandeur et d'espèce; soient des droites correspondsntes aux faces de ce polyhèdre données de grandeur. D'un point de l'espace soient sbaissées sur ces faces des perpendiculaires (chacune dans une direction déterminée relativement à ces faces). Soit prise la somme des rectangles de ces perpendiculsires par les droites correspondantes données de grandeur. Soit cette somme égale à un espace E donné de grsndeur. On demande le lieu de ce point.

Je crois devoir introduire au développement général de la question proposée, psr l'exemple d'une pyramide.

Que le point duquel on abaisse les perpendiculaires sur les plans qui terminent la pyramide, soit regardé comme intérieur à la pyramide. Soit S son sommet.

De ce sommet soient élevées aux faces latérales de la pyramide des perpendiculaires dirigées dans un sens déterminé; par exemple, toutes dirigées du dedans au dehors du polyhèdre. Du même sommet, soit aussi abaissée une perpendiculaire sur la base, et soit prolongée cette perpendiculaire au-delà du sommet. Sur les premières perpendiculaires, et sur le prolongement de la dernière, soient portées depuis le sommet des droites respectivement égales aux droites données de grandeur; et soit pris le centre Z des moyennes distances des extrémités de toutes ces droites. Soit aussi pris le rectangle de la hauteur de la pyramide par la droite donnée de grandeur correspondante à la base; soit ce rectangle désigné par E'.

1.° Soit l'espace donné de grandeur égal au rectangle de la hauteur de la pyramide par la droite donnée de grandeur correspondante à la base; le lieu cherché est un plan perpendiculaire à SZ et mené par Z. Si les points S et Z coïncident, le lieu cherché est indéterminé. Cela a lieu en particulier lorsque les droites données de grandeur sont entr'elles comme la base et les faces correspondantes de la pyramide (§ 22).

2.° Soit l'espace E donné de grandeur, non égal à l'espace E'. Que la différence soit divisée en parties égales dont le nombre soit égal au nombre de toutes les faces de la pyramide. Soit convertie une de ces parties en un rectangle ayant pour un de ses côtés la droite SZ. Soit porté l'autre côté de ce rectangle sur la droite SZ depuis le point S, dans la direction de la hauteur de la pyramide abaissée depuis le sommet S, ou dans la direction opposée; suivant que l'espace E est plus grand que l'espace E' ou plus petit que lui; et par l'extrémité de la droite qui vient d'être portée sur SZ soit élevée à SZ un plan perpendiculaire; il sera le lieu cherché.

Remarque. Ce n'est que pour rendre la solution un peu plus simple que les perpendiculaires aux faces ont été menées depuis le sommet S de la pyramide. La construction auroit été peu différente si ce point eût été quelconque. Il en est de même du problème général dont je vais exposer la solution d'une manière abrégée.

D'un point de l'espace, par exemple d'un des sommets du polyhèdre donné de grandeur et d'espèce, soient menées à toutes ses faces des perpendiculaires dirigées dans un sens déterminé; par exemple, du dedans au dehors du polyhèdre, relativement à ces faces, ou réciproquement. Soit E l'espace donné de grandeur, et soit E' la somme des rectangles des perpendiculaires abaissées sur les faces non adjacentes à ce sommet par les droites correspondantes données de grandeur.

Digitized by Google

Sur les perpendiculaires aux faces adjacentes à ce sommet, et sur les prolongemens des perpendiculaires aux faces qui ne lui sont pas adjacentes, soient portées depuis ce sommet des droites égales aux droites correspondantes données de grandeur. Soit Z le centre des moyennes distances des extrémités de toutes ces droites.

1.° Soient les deux espaces E et E′ égaux entr'eux. Le lieu proposé est le plan perpendiculaire à SZ mené par Z. Si le point Z coïncide avec le point S, la droite SZ a une direction quelconque, et le lieu proposé est indéterminé, de manière que tout point de l'espace jouit de la propriété proposée. Cela a lieu en particulier lorsque les droites données de grandeur sont entr'elles comme les faces correspondantes du polyhèdre.

2.° Que les deux espaces *E* et *E′* soient inégaux entr'eux. Soit prise la différence de ces deux espaces, soit divisée cette différence en parties égales dont le nombre soit égal à celui des faces du polyhèdre, et soit changée une de ces parties en un rectangle ayant pour un de ses côtés la droite SZ. Le lieu proposé est un plan perpendiculaire à SZ, et éloigné du point S d'une quantité égale à l'autre côté de ce rectangle. Ce plan et le point Z sont situés du même côté du point S, ou des deux côtés de ce point sur la ligne SZ, suivant que l'espace E est plus grand que l'espace E′ ou plus petit que lui.

§ 91.

Problème. Soient A, A′, A″.... A^{n-1}, A^n, des points donnés de position dans l'espace. Soient m, m′, m″.... m^{n-1}, m^n, des exposans correspondans de rapports donnés. On demande le lieu des points Y de chacun desquels menant des droites aux points donnés, la somme des espaces qui ont aux carrés de ces droites les rapports donnés, soit égale à un espace *S* donné de grandeur.

Le lieu proposé est une surface sphérique, lorsque le nombre des points est deux. Soit Z le centre des moyennes distances des points A et A′ pour les coefficiens *m* et *m′*. On a $m \times YA^2 + m' \times YA'^2 = m \times ZA^2 + m' \times ZA'^2 + (m+m')ZY^2$.

$$= \frac{mm'}{m+m'} AA'^2 + (m+m')YZ^2 \text{ (§ 39).}$$

Que le nombre des points soit trois. Soit Z le centre des moyennes distances de deux de ces points A et A′ pour les coefficiens *m* et *m′*; et soit Z′ le centre des moyennes distances des points Z et A″ pour les coefficiens m+m′ et m″; et partant, le centre des moyennes distances des points A, A′, A″. On a $m'' \times YA''^2 + (m+m')YZ^2 = m''Z'A''^2 + (m+m)ZZ'^2 + (m+m'+m'')YZ'^2$; et

partant, $m\times YA^2+m'\times YA'^2+m''\times YA''^2+(m+m')\times YZ^2$

$=m\times YA^2+m'\times YA'^2+m''\times YA''^2+(m+m')ZZ'^2+(m+m'+m'')\times YZ'^2.$

Donc, $m\times YA^2+m'\times YA'^2+m''\times YA''^2$

$=m\times ZA^2+m'\times ZA'^2+m''\times Z'A''^2+(m+m')ZZ'^2+(m+m'+m'')YZ'^2.$

$=m\times Z'A^2+m'\times Z'A'^2+m''\times Z'A''^2 \quad +(m+m'+m'')YZ'^2.$

$$=\frac{mm'}{m+m'+m''}AA'^2+\frac{mm''}{m+m'+m''}AA''^2+\frac{m'm''}{m+m'+m''}\times A'A''^2+(m+m'+m'')YZ'^2.$$

Partant, la première somme étant égale à un espace donné de grandeur, la seconde est aussi égale à cet espace; mais la somme

$$\frac{mm'}{m+m'+m''}AA'^2+\frac{mm''}{m+m'+m''}AA''^2+\frac{m'm''}{m+m'+m''}A'A''^2$$ est donnée de grandeur; donc aussi, l'espace $(m+m'+m'')YZ'^2$ est donné de grandeur; et partant, la droite YZ' est donnée de grandeur; mais le point Z' est donné de position; donc, les points Y sont à une surface sphérique donnée.

En général. Soit Z le centre des moyennes distances des points $A, A', A''\ldots A^{x-1}$, pour les coefficiens $m, m', m''\ldots m^{x-1}$. Soit aussi Z' le centre des moyennes distances des points Z et A^x, pour les coefficiens $m+m'+m''+\ldots+m^{x-1}$ et m^x; ou le centre des moyennes distances des points $A, A', A''\ldots A^{x-1}, A^x$, pour les coefficiens $m, m', m''\ldots m^{x-1}, m^x$. Qu'on ait démontré que pour un point quelconque Y on a l'équation $f.m^{x-1}\overline{YA^{x-1}}^2=f.m^{x-1}\times\overline{ZA^{x-1}}^2+YZ^2f.m^{x-1}$. J'affirme qu'on a aussi l'équation $f.m^x\times\overline{YA^x}^2=f.m^x\times\overline{Z'A^x}^2+YZ'^2f.m^x$.

La démonstration pour le cas actuel des points situés dans l'espace est exactement la même que celle qui a été développée dans le § 41 pour le cas des points situés sur un plan.

Par supposition, $f.m^{x-1}\overline{YA^{x-1}}^2=f.m^{x-1}\overline{ZA^{x-1}}^2+YZ^2f.m^{x-1}$

Donc, $f.m^x\times\overline{YA^x}^2=f.m^{x-1}\overline{ZA^{x-1}}^2+m^x\times\overline{YA^x}^2+YZ^2f.m^{x-1}$.

Mais, $m^x\times\overline{YA^x}^2+YZ^2f.m^{x-1}=m^x\overline{Z'A^x}^2+Z'Z^2f.m^{x-1}+YZ'^2f.m^x$.

Donc, $f.m^x\times\overline{YA^x}^2=f.m^{x-1}\times\overline{ZA^{x-1}}^2+m^x\times\overline{Z'A^x}^2+Z'Z^2f.m^{x-1}+YZ'^2f.m^x$.

$=f.m^{x-1}\times\overline{Z'A^{x-1}}^2+m^x\overline{Z'A^x}^2 \quad +YZ'^2f.m^x$

$=f.m^x\times\overline{Z'A^x}^2 \quad +YZ'^2f.m^x.$

Partant, si la première somme est égale à un espace S donné de grandeur,

la

la seconde somme est égale au même espace ; mais le terme $f.\ m^n \times Z'^n$ est donné de grandeur, donc le terme $YZ'^n f.\ m^n$ est aussi donné de grandeur ; mais le point Z' est donné de position ; donc les points Y sont à une surface sphérique donnée.

Partant, la proposition qui a lieu pour les points situés sur un même plan, a lieu aussi pour les points situés à volonté dans l'espace ; et on peut appliquer à ces derniers tout ce qui a été démontré sur les premiers.

En particulier ; en substituant des plans aux lignes droites dans le § 42 on aura une proposition générale correspondante sur des points et des plans donnés de position.

§ 92.

On peut étendre à quelques polyhèdres et en particulier aux solides réguliers, les propositions relatives aux figures planes régulières mentionnées dans les §§ 55 et 56, et s'occuper de la somme des carrés des perpendiculaires abaissées sur leurs faces depuis un point dans l'espace.

Définition. J'appelle *angle solide régulier*, un angle solide dont les angles au sommet sont égaux entr'eux, et dont les inclinaisons des faces adjacentes sont égales entr'elles (lors même que les angles des faces n'appartiennent pas à des figures régulières).

On peut concevoir un angle solide régulier engendré de la manière suivante. Du centre d'un polygone régulier soit élevée une perpendiculaire au plan de ce polygone. Soient des plans passant par un point pris sur cette perpendiculaire et par les côtés du polygone. On obtient à ce point un angle solide régulier, dont le nombre des faces est égal au nombre des côtés du polygone. La perpendiculaire élevée au plan du polygone régulier depuis son centre est appelée l'*axe* de l'angle solide ; le polygone lui-même est appelé la *base*.

Chacune des faces d'un angle solide régulier est également inclinée à sa base. L'axe d'un angle solide régulier est aussi également incliné à chacune de ses faces et à chacune de ses arrêtes. J'appellerai ϕ l'inclinaison des faces d'un angle solide régulier au plan de sa base, et partant aussi à un plan quelconque perpendiculaire à son axe.

§ 93.

D'un point pris dans l'espace soient abaissées des perpendiculaires sur les faces d'un angle solide régulier. On peut réduire l'expression de la somme des carrés de ces perpendiculaires à la somme des carrés des perpendiculaires

abaissées d'un point pris dans le plan d'un polygone régulier sur les côtés de ce polygone.

Fig. 52. En effet, soit Y un point dans l'espace depuis lequel on abaisse des perpendiculaires YQ sur les faces d'un angle solide régulier S. Que le nombre de ses faces soit n. Par Y qu'on fasse passer un plan perpendiculaire à l'axe de l'angle solide; et soient YP des perpendiculaires abaissées du même point sur les côtés de la section. Soit r le rayon du cercle inscrit à la section; et soit Z son centre.

On a, $YQ = YP \sin. \varphi$; donc, $f.\ YQ^2 = \sin.^2 \varphi\, f.\ YP^2$. Mais (§ 56) $2f.\ YP^2 = n(2r^2 + YZ^2)$; donc, $2f.\ YQ^2 = \sin.^2\varphi \times n(2r^2 + YZ^2)$. Mais, $r = SZ \cot. \varphi$; donc, $2f.\ YQ^2 = 2nSZ^2 \cos.^2\varphi + nYZ^2 \sin.^2\varphi$.

Lorsque $2\cos.^2\varphi = \sin.^2\varphi$; ou lorsque $\text{tang.}^2\varphi = 2$; les coefficiens de SZ et de YZ sont égaux entr'eux; alors, $2f.\ YQ^2 = n\sin.^2\varphi \times SY^2$. Mais puisque

$$\sin.^2\varphi + \cos.^2\varphi = 1.$$

Lorsque $\sin.^2\varphi = 2\cos.^2\varphi$; $3\sin.^2\varphi = 2$

$f.\ YQ^2 = n \times \frac{1}{3} SY^2$; partant, lorsque SY est d'une grandeur constante, $f.\ YQ^2$ est aussi d'une grandeur constante, et réciproquement. On a donc le théorème suivant.

Théorème. Soit un angle solide régulier dans lequel les faces sont inclinées au plan de la base sous un angle dont la tangente est au rayon comme la diagonale d'un carré est à son côté. Du sommet de cet angle solide comme centre avec un rayon quelconque, soit décrite une surface sphérique. D'un point pris sur cette surface soient abaissées des perpendiculaires sur les faces de l'angle solide. La somme des carrés de ces perpendiculaires est constante, et le triple de cette somme est égal au carré du rayon pris autant de fois que l'angle solide a de faces.

Cette propriété a lieu en particulier pour l'angle solide de l'octahèdre régulier; ou pour l'angle solide de la pyramide droite à base carrée dont les faces sont des triangles équilatéraux.

§ 94.

Soit une pyramide régulière dont la hauteur est h. D'un point Y soient abaissées sur ses faces latérales des perpendiculaires YQ, et soit aussi Yq perpendiculaire à sa base

$$\begin{aligned} 2f.\ YQ^2 + 2Yq^2 &= 2nSZ^2\cos.^2\varphi + 2Yq^2 + nYZ^2\sin.^2\varphi \\ &= 2nSZ^2\cos.^2\varphi + 2(h - SZ)^2 + nYZ^2\sin.^2\varphi \\ &= 2SZ^2(n\cos.^2\varphi + 1) - 4h \times SZ + 2hh + nYZ^2\sin.^2\varphi. \end{aligned}$$

Que la somme des carrés des perpendiculaires abaissées sur toutes les faces (la base y comprise) soit donnée de grandeur; le lieu des points Y est une surface sphérique, lorsque les coefficiens de SZ^2 et de YZ^2 sont égaux entr'eux; et partant, lorsque $2n\cos.^2\varphi+2=n\sin.^2\varphi=n(1-\cos.^2\varphi)$; $3n\cos.^2\varphi=n-2$,

$\cos.^2\varphi=\frac{n-2}{3n}$; $\sin.^2\varphi=\frac{2(n+1)}{3n}$; $\tang.^2\varphi=\frac{2(n+1)}{n-2}$. Or, $h=r\tang.\varphi$; donc,

$hh=rr\times\frac{2(n+1)}{n-2}$.

Exemples. Soit $n=3$; $hh=8rr$; $\cos.\varphi=\frac{1}{3}$. Cela a lieu en particulier pour le tétrahèdre régulier.

Soit la somme des carrés des perpendiculaires abaissées sur toutes les faces désignée par S''.

$$2S''=\tfrac{8}{3}SZ^2-4h\times SZ+2hh+\tfrac{8}{3}YZ^2$$
$$12S''=16SZ^2-24h\times SZ+12hh+16YZ^2$$
$$=(4SZ-3h)^2+3hh+16YZ^2.$$
$$\tfrac{3}{4}S''=(SZ-\tfrac{3}{4}h)^2+\tfrac{3}{16}hh+YZ^2.$$

Or, le centre du tétrahèdre régulier est aux trois quarts de sa hauteur à compter depuis le sommet; partant, $SZ-\frac{3}{4}h$ est l'abscisse prise sur la hauteur à compter depuis le centre du tétrahèdre; donc, $(SZ-\frac{3}{4}h)^2+YZ^2$ est le carré de la distance de Y au centre du tétrahèdre. Partant, le triple de la somme des carrés des perpendiculaires abaissées d'un point de l'espace sur les faces d'un tétrahèdre régulier, vaut la somme, de la somme des carrés des perpendiculaires abaissées du centre du tétrahèdre sur ses faces, et de trois fois le carré du rayon de la sphère inscrite au tétrahèdre.

Soit $n=4$; $\tang.^2\varphi=5$; $hh=5rr$.

$n=5$; $\tang.^2\varphi=4$; $h=2r$.

§ 95.

Soit un prisme droit à base régulière, dont la hauteur est $2h$, et dont r est le rayon du cercle inscrit à la base. Soit C le milieu de la hauteur. D'un point quelconque Y de l'espace soient abaissées des perpendiculaires sur les faces de ce prisme et sur ses bases. Soit aussi YZ perpendiculaire à la hauteur. Soit S'' la somme des carrés des perpendiculaires à toutes les faces. FIG. 53.

On a $2S''=n(2r^2+YZ^2)+4(hh+CZ^2)=2nr^2+4hh+nYZ^2+4CZ^2$. Partant, lorsque S'' est une quantité constante, pour que les points Y soient à la surface d'une sphère on doit avoir $n=4$. Partant, les prismes droits à base carrée sont les seuls auxquels appartienne la propriété suivante. La surface d'une sphère est

le lieu des points desquels abaissant sur leurs faces des perpendiculaires la somme de leurs carrés est constante. Cette propriété appartient en particulier au cube ou hexahèdre octogone régulier.

Le double de la somme des carrés des perpendiculaires abaissées d'un point de l'espace sur les faces d'un parallélipipède rectangle à base carrée, surpasse le double de cette somme relative au centre du parallélipipède, de quatre fois le carré de la distance de ce point au centre du parallélipipède.

§ 96.

Fig. 54. Soit un fuseau pyramidal composé de deux pyramides droites ayant une base régulière commune. D'un point de l'espace soient abaissées des perpendiculaires sur toutes les faces de ce solide; on peut aussi déterminer la somme des carrés de ces perpendiculaires.

Soient S et S' les sommets des deux pyramides; et soit C le centre du solide. Soit Y un point de l'espace duquel on abaisse sur les faces du solide les perpendiculaires YQ, YQ'. Par Y soit mené un plan perpendiculaire à l'axe SS'; soient r et r' les rayons des cercles inscrits aux sections des deux pyramides par ce plan; et soit Z le centre de ces sections.

$$2f.\,YQ^2 = n\sin.^2\phi\,(2r^2 + YZ^2)$$

$$2f.\,YQ'^2 = n\sin.^2\phi\,(2r'^2 + YZ^2).$$

Donc, $2S'' = 2n\sin.^2\phi\,(r^2 + r'^2) + 2n\sin.^2\phi \times ZY^2.$

Or, $r = SZ\cot.\phi$; $r' = S'Z\cot.\phi$.

Donc, $2S'' = 2n\cos.^2\phi\,(SZ^2 + S'Z^2) + 2n\sin.^2\phi \times ZY^2.$

Or, $SZ^2 + S'Z^2 = 2SC^2 + 2CZ^2$. Donc,

$$S'' = 2n\cos.^2\phi\,(SC^2 + CZ^2) + n\sin.^2\phi \times ZY^2$$

$$= 2n\cos.^2\phi \times SC^2 + n(2CZ^2\cos.^2\phi + ZY^2\sin.^2\phi).$$

Application. Que les coefficiens de CZ^2 et de ZY^2 soient égaux entr'eux; et partant, soit $\text{tang.}^2\phi = 2$; $CZ^2 + ZY^2 = CY^2$; partant, $S'' = 2n\cos.^2\phi\,(SC^2 + CY^2)$. Or, $2nSC^2\cos.^2\phi$ est la somme des carrés des perpendiculaires abaissées du centre C sur les faces du polyhèdre; et partant, lorsque $\text{tang.}^2\phi = 2$; le triple de la somme des carrés des perpendiculaires abaissées d'un point dans l'espace sur les faces du solide, surpasse le triple de la somme des carrés des perpendiculaires abaissées du centre du polyhèdre sur les mêmes faces, du carré de la distance de ce point au centre pris autant de fois qu'il y a de faces. Partant, lorsque cette somme est constante, les points Y sont à une surface sphérique dont C est le centre.

Cela

Cela a lieu en particulier pour l'octahèdre-hexagone régulier, qui est un fuseau pyramidal, composé de deux pyramides droites à bases carrées, et dont les faces sont des triangles équilatéraux.

Nous venons de voir que les solides réguliers du plus petit nombre de faces, le tétrahèdre-tétragone, l'hexahédre-octogone, et l'octahèdre-hexagone, donnent lieu à une propriété locale de la surface sphérique, relativement à la somme des carrés des perpendiculaires abaissées sur leurs faces. Il est naturel de procéder à la même recherche sur le dodécahèdre-icosagone et sur l'icosahèdre-dodécagone.

§ 97.

Lemme connu. Dans le dodécahèdre-icosagone régulier, la tangente du supplément de l'inclinaison de deux faces est double du rayon. Partant, le carré du sinus et le carré du cosinus de ce supplément sont respectivement les $\frac{4}{5}$ et la $\frac{1}{5}$ du carré du rayon.

Soit regardé le dodécahèdre-icosagone régulier comme reposant sur une de ses faces prise pour base, la face opposée sera appelée base supérieure. On peut regarder les faces adjacentes à chaque base comme appartenant à la surface latérale d'une pyramide droite tronquée; partant, quant à l'objet de la recherche actuelle, on peut s'occuper des solides composés de deux troncs pyramidaux égaux, appartenant à des pyramides régulières égales, opposées sur une base commune.

Soient S et S′ les sommets des deux pyramides auxquelles appartiennent les deux troncs pyramidaux. Soit C le centre de la base commune des deux troncs, ou le centre du solide. Soient c et c′ les centres des deux bases. Soit Y le point duquel on abaisse des perpendiculaires sur toutes les faces. Par Y soit un plan parallèle aux bases, qui rencontre en Z l'axe du solide. Soient r et r' les rayons des cercles inscrits aux sections des troncs par le plan parallèle aux bases. Soit n le nombre des côtés de chaque base; soient YQ et YQ′ les perpendiculaires aux faces latérales des troncs; et soient Yq et Yq′ les perpendiculaires aux deux bases du solide. FIG. 55.

$2f.\,YQ^2 = n(2r^2 + YZ^2)\sin.^2\phi$

$2f.\,YQ'^2 = n(2r'^2 + YZ^2)\sin.^2\phi$

$2Yq^2 + 2Yq'^2 = 4Cc^2 + 4CZ^2.$

De là; $2S'' = 2n(r^2 + r'^2)\sin.^2\phi + 4Cc^2 + 2n \times YZ^2 \sin.^2\phi + 4CZ^2.$

Or, $r = SZ\cot.\phi$

$r' = S'Z\cot.\phi$

$r^2 + r'^2 = (SZ^2 + S'Z^2)\cot.^2\phi$; et $(r^2 + r'^2)\sin.^2\phi = (SZ^2 + S'Z^2)\cos.^2\phi$

$= 2(SC^2 + CZ^2)\cos.^2\phi$; de là,

$S'' = 2n(SC^2 + CZ^2)\cos.^2\phi + 2Cc^2 + n \times YZ^2 \sin.^2\phi + 2CZ^2$

$= 2nSC^2\cos.^2\phi + 2Cc^2 + n \times YZ^2 \sin.^2\phi + 2CZ^2(n\cos.^2\phi + 1).$

Partant, la somme S'' étant supposée donnée de grandeur, le lieu des points Y est une surface sphérique, lorsque les coefficiens de YZ^2 et de CZ^2 sont égaux entr'eux; et partant, lorsque

$n\sin.^2\phi = 2(n\cos.^2\phi + 1)$; et partant, $3n\cos.^2\phi = n - 2$;

$\cos.^2\phi = \frac{n-2}{3n}$; $\sin.^2\phi = \frac{2(n+1)}{3n}$; $\tang.^2\phi = \frac{2(n+1)}{n-2}$.

Exemple. Soit $n = 5$; $\cos.^2\phi = \frac{1}{5}$; $\sin.^2\phi = \frac{4}{5}$; $\tang.\phi = 2$; ce qui a lieu (lemme) dans le dodécahèdre régulier. $Cc = SC\cos.\phi$; partant, $S'' = 12Cc^2 + 4CY^2$.

Partant, la somme des carrés des perpendiculaires abaissées d'un point quelconque de l'espace sur les faces d'un dodécahèdre régulier, surpasse la somme des carrés des perpendiculaires abaissées du centre sur ces faces, du quadruple du carré de la distance de ce point au centre. Partant, si du centre d'un dodécahèdre régulier avec un rayon quelconque on décrit une surface sphérique; la somme des carrés des perpendiculaires aux faces du dodécahèdre abaissées d'un point quelconque de cette surface sphérique, est constante.

Je passe à considérer sous le même point de vue l'icosahèdre-dodécagone régulier; en faisant précéder quelques lemmes relatifs à ce solide.

§ 98.

Lemme premier. Soit une droite coupée en moyenne et extrême raison; l'excès du carré de toute la ligne sur le carré de sa grande partie est égal au rectangle de toute la ligne par cette partie.

FIG. 56. Soit AB une ligne coupée en C en moyenne et extrême raison; j'affirme que $AB^2 - AC^2 = AB \times AC$.

Digitized by Google

Démonstration. $AC^2 = AB \times BC$; donc, $AB^2 - AC^2 = AB(AB-BC) = AB \times AC$.

Lemme second, connu. Soient un pentagone et un décagone réguliers inscrits au même cercle. Le carré du côté du pentagone est égal à la somme des carrés du rayon et du côté du décagone.

Lemme troisième. Soit un icosahèdre-dodécagone régulier. Soit prise la pyramide régulière à base pentagone dont le sommet est un des sommets de ce polyhèdre, et dont la base passe par les extrémités des arrêtes adjacentes à ce sommet. J'affirme que la hauteur de cette pyramide est égale au côté du décagone inscrit au même cercle que la base.

Soit S un des sommets de l'icosahèdre. Soit C le centre, et soit CA le rayon du cercle circonscrit au pentagone dont les sommets sont aux extrémités des arrêtes passant par S; soit SA une de ces arrêtes, qui est égale au côté de ce pentagone. J'affirme que SC est égale à la grande partie du rayon CA coupé en moyenne et extrême raison, ou qu'elle est égale au côté du décagone inscrit au cercle dont CA est le rayon. FIG. 57.

En effet, $SA^2 = AC^2 + SC^2$; mais SA est le côté du pentagone inscrit au cercle dont CA est le rayon; donc (lemme second) SC est le côté du décagone inscrit au même cercle; ou SC est la grande partie du rayon CA coupé en moyenne et extrême raison.

Lemme quatrième. Soit un icosahèdre-dodécagone régulier. Soient considérées deux des pyramides pentagones qui ont pour sommets deux des sommets opposés de ce polyhèdre, et dont les bases passent par les extrémités des arrêtes adjacentes à ces sommets. J'affirme que la distance des bases de ces pyramides est égale au rayon du cercle circonscrit à l'une de ces bases.

Soient S et S' deux sommets opposés d'un icosahèdre-dodécagone régulier; et partant, soit SS' un des axes de ce polyhèdre. Soient SC et S'C' les hauteurs des deux pyramides qui ont leurs sommets en S et en S', et dont les bases passent par les extrémités des arrêtes adjacentes à ces sommets. Soient CA et C'A' les rayons des cercles circonscrits à ces bases; soient SA et S'A' deux côtés de ce polyhèdre, et soit CC' la distance de ces deux bases. J'affirme que CC' = CA.

Démonstration. Dans le triangle SAS' rectangle en A, $SS' : SA = SA : SC$; et partant, $SS' : SC = SA^2 : SC^2$;

et $SS' : 2SC = SA^2 : 2SC^2$

Donc, $SS' - 2SC : SC = SA^2 - 2SC^2 : SC^2$,

ou, $CC' : SC = SA^2 - 2SC^2 : SC^2$

et $CC' \times SC = SA^2 - 2SC^2 = CA^2 - SC^2$.

Mais (lemme troisième), SC est la grande partie de CA coupée en moyenne et extrême raison; et partant, $CA^2 - SC^2 = CA \times SC$; donc $CC' = CA$.

Corollaire. $SC^2 + CC'^2 = AS^2$.

Application. De là, on peut déterminer la relation qui règne entre les inclinaisons à la base (d'une des pyramides pentagones mentionnées dans les lemmes précédens), des faces adjacentes à cette base, et situées de part et d'autre d'elle. Soit h la hauteur d'une des faces de l'icosahèdre; $h^2 = \frac{5}{4} AS^2$, ou, $AS^2 = \frac{4}{5} hh$; donc, $SC^2 + CC'^2 = \frac{4}{5} hh$; et $\frac{SC^2}{hh} + \frac{CC'^2}{hh} = \frac{4}{5}$. Or, $\frac{SC}{h}$ et $\frac{CC'}{h}$ sont respectivement les sinus des inclinaisons à la base de la pyramide des faces qui sont adjacentes à cette base et situées de part et d'autre d'elle; donc, appelant ces angles ϕ et ϕ', on a $\sin.^2\phi + \sin.^2\phi' = \frac{4}{5}$

De là, $\cos.^2\phi + \cos.^2\phi' = \frac{2}{5}$.

Item, $\sin.^2\phi + \sin.^2\phi' = 2(\cos.^2\phi + \cos.^2\phi')$.

Soit un icosahèdre-dodécagone régulier dont on joint deux sommets opposés par une ligne droite que j'appellerai son axe. Soient des plans passant par les extrémités des arrêtes adjacentes à ces sommets; ces plans sont les bases de deux pyramides pentagones droites ayant les mêmes sommets. On peut décomposer la surface de l'icosahèdre dans les surfaces latérales de ces deux pyramides, et dans la partie de cette surface comprise entre ces deux bases. Or, cette partie se décompose elle-même en deux autres, qui appartiennent à des surfaces de pyramides droites ayant leurs axes sur la même droite. Partant; quant à l'objet présent, on est appelé à s'occuper des solides, terminés d'une part par deux troncs pyramidaux, égaux entr'eux, construits sur une même base, et par deux pyramides droites aussi égales entr'elles, décrites sur les bases opposées de ces troncs.

Soient S et S' les sommets des deux pyramides; soient s et s' les sommets des pyramides auxquels les troncs appartiennent. Soit C'' le centre du solide. Soient ϕ et ϕ' les inclinaisons des faces des pyramides et de celles des troncs pyramidaux aux plans des bases. Soit Y un point depuis lequel on abaisse des perpendiculaires sur les faces du solide. Soient YQ et YQ' les perpendiculaires abaissées sur les faces des pyramides; soient Yq, Yq' les perpendiculaires abaissées sur les faces des troncs. Par Y soit mené un plan perpendiculaire à l'axe du solide et qui le rencontre en Z. Soient R et R' les rayons des cercles inscrits aux sections des pyramides par ce plan, et soient r et r' les rayons des cercles inscrits aux sections des troncs pyramidaux par le même plan.

2*f*.

$2f.\,YQ^2 = n(2R^2 + YZ^2)\sin.^2\phi \qquad 2f.\,Yq^2 = n(2r^2 + YZ^2)\sin.^2\phi'$

$2f.\,YQ'^2 = n(2R'^2 + YZ^2)\sin.^2\phi \qquad 2f.\,Yq'^2 = n(2r'^2 + YZ^2)\sin.^2\phi'$

$2S' = 2n\sin.^2\phi(R^2 + R'^2) + 2n\sin.^2\phi'(r^2 + r'^2) + 2nYZ^2(\sin.^2\phi + \sin.^2\phi').$

Or, $R = SZ\cos.\phi \qquad r = sZ\cos.\phi'$

$R' = S'Z\cos.\phi \qquad r' = s'Z\cos.\phi'$

Donc, $S' = n\cos.^2\phi(SZ^2 + S'Z^2) + n\cos.^2\phi'(sZ^2 + s'Z^2) + nYZ^2(\sin.^2\phi + \sin.^2\phi').$

Or, $SZ^2 + S'Z^2 = 2SC''^2 + 2C''Z^2$

$sZ^2 + s'Z^2 = 2sC''^2 + 2C''Z^2.$

Donc, $S' = 2n\cos.^2\phi \times SC''^2 + 2n\cos.^2\phi' \times sC''^2 + 2nC''Z^2(\cos.^2\phi + \cos.^2\phi') + nYZ^2(\sin.^2\phi + \sin.^2\phi').$

Partant, la somme S' étant donnée de grandeur, le lieu des points Y est une surface sphérique, lorsque les coefficiens de $C''Z^2$ et de YZ^2 sont égaux entr'eux; et partant (indépendamment de toute valeur de n), lorsque $\sin.^2\phi + \sin.^2\phi' = 2(\cos.^2\phi + \cos.^2\phi')$. Or, cela a lieu en particulier pour l'icosahèdre régulier; partant, pour l'icosahèdre régulier le lieu des points Y est une surface sphérique. Item, les expressions $SC''\cos.\phi$ et $sC''\cos.\phi'$, sont respectivement les perpendiculaires abaissées du centre du solide sur les faces des pyramides, et sur celles des troncs pyramidaux. Partant, on obtient le théorème suivant. Du centre de l'icosahèdre régulier et d'un point quelconque de l'espace soient abaissées des perpendiculaires sur toutes les faces de ce solide; le triple de la somme des carrés des perpendiculaires abaissées d'un point quelconque de l'espace, surpasse le triple de la somme des carrés des perpendiculaires abaissées du centre, du carré de la distance de ce point au centre pris autant de fois que le solide a de faces. Partant, si du centre de l'icosahèdre régulier avec un rayon quelconque on décrit une surface sphérique; et si d'un point de cette surface sphérique on abaisse des perpendiculaires sur les faces de l'icosahèdre, la somme des carrés de ces perpendiculaires est d'une grandeur constante.

§ 99.

On peut étendre les recherches de ce genre à d'autres polyhèdres dans la classe desquels ne sont pas compris les solides réguliers; je vais en donner encore un exemple.

Soit un solide terminé d'une part par un prisme droit à base régulière, et de l'autre par deux pyramides droites égales décrites sur les bases de ce prisme. D'un point de l'espace soient abaissées des perpendiculaires sur les faces de ce polyhèdre; et soit prise la somme des carrés de ces perpendiculaires. On demande l'expression de cette somme.

Soit R le rayon du cercle inscrit aux bases du prisme; et soit $2h$ la hauteur du prisme. Soient S et S' les sommets des deux pyramides. Soit C le centre du polyhèdre, et soient YQ les perpendiculaires abaissées sur les faces du prisme; soient Yq et Yq' les perpendiculaires abaissées sur les faces des pyramides.

Soit ϕ l'inclinaison d'une face de la pyramide à la base du prisme. Soient r et r' les rayons des cercles inscrits aux sections des pyramides par un plan parallèle aux bases et passant par Y; et soit Z le point où ce plan rencontre l'axe.

$2f.\ YQ^2 = n(2R^2+YZ^2).$

$2f.\ Yq^2 = n(2r^2+YZ^2)\sin.^2\phi$

$2f.\ Yq'^2 = n(2r'^2+YZ^2)\sin.^2\phi;$

Donc, $2S'' = 2n(R^2+(r^2+r'^2)\sin.^2\phi)+nYZ^2(1+2\sin.^2\phi)$

Or; $\begin{matrix} r = SZ\cot.\phi \\ r' = S'Z\cot.\phi \end{matrix}$; $(r^2+r'^2)\sin.^2\phi = (SZ^2+S'Z^2)\cos.^2\phi = 2(SC^2+CZ^2)\cos.^2\phi.$

Donc, $2S'' = 2n(R^2+2(SC^2+CZ^2)\cos.^2\phi)+nYZ^2(1+2\sin.^2\phi).$

$= 2nR^2+4nSC^2\cos.^2\phi+4nCZ^2\cos.^2\phi+nYZ^2(1+2\sin.^2\phi).$

Partant, la somme S'' étant donnée; le lieu des points Y est une surface sphérique, lorsque les coefficiens de CZ^2 et de YZ^2 sont égaux entr'eux; et partant, lorsque $4\cos.^2\phi = 1+2\sin.^2\phi;$

De là, $2(1+\cos.2\phi) = 1+(1-\cos.2\phi);\ 3\cos.2\phi = 0;\ \cos.2\phi = 0.$

Donc, $2\phi = 1^{Dr};\ \phi = \frac{1}{2}D.$

Que le nombre des faces latérales de chaque pyramide ne soit que la moitié du nombre des faces latérales du prisme,

On a l'équation, $2S'' = n(2R^2+YZ^2)+n(r^2+r'^2+YZ^2)\sin.^2\phi;$ d'où l'on tire $2S'' = n\times 2R^2+n(SZ^2+S'Z^2)\cos.^2\phi+nYZ^2(1+\sin.^2\phi)$

$= n\times 2R^2+2nSC^2\cos.2\phi+2nCZ^2\cos.^2\phi+nYZ^2(1+\sin.^2\phi).$

Le lieu des points Y est une surface sphérique, lorsque les coefficiens de CZ^2 et de YZ^2 sont égaux entr'eux, ce qui a lieu lorsque $2\cos.^2\phi = 1+\sin.^2\phi;$ ou, $3\cos.^2\phi = 2;\ 3\sin.^2\phi = 1;$ $\tang.^2\phi = \frac{1}{2};\ \cot.^2\phi = 2;\ \cos.2\phi = \frac{1}{3}.$

Cela a lieu en particulier dans le dodécahèdre-tétradécagone, terminé par douze rhombes, lesquels forment quatorze angles solides. Huit de ces angles solides sont formés par trois angles obtus de ces rhombes, et les six angles solides restans sont formés par quatre angles aigus de ces rhombes.

On peut concevoir ce solide comme tirant son origine soit du cube ou hexahèdre-octogone régulier, soit de l'octahèdre-hexagone régulier, en faisant passer par chacune des arrêtes de ces solides des plans également inclinés

aux faces adjacentes à ces arrêtes. Ce solide se présente souvent dans la nature, et en particulier dans la crystallisation; le fond des ruches des abeilles est conforme à ses angles solides trihèdres.

On peut aussi obtenir un solide rhomboïdal demi-régulier, par le dodécahèdre-icosagone, ou par l'icosahèdre-dodécagone, réguliers, en faisant passer par chacune des arrêtes de ces solides des plans également inclinés aux faces adjacentes On obtient un solide terminé par trente rhombes qui forment trente-deux angles solides (et partant ce solide est un triacontahèdre-duotriacontagone); vingt de ces angles solides sont trihèdres, et formés par trois angles obtus de ces rhombes; et douze de ces angles sont pentahèdres et formés par cinq angles aigus des mêmes rhombes. Je ne sais si ce polyhèdre a son type dans la nature.

Scholie. J'ai étendu plus loin mes recherches analogues aux précédentes; et je me suis occupé de la somme des cubes des perpendiculaires abaissées sur les faces d'un polyhèdre symétrique, depuis un point pris en dedans de lui. J'ai trouvé entr'autres (le tétrahèdre excepté) que la surface d'une sphère est le lieu des points (intérieurs au solide) de chacun desquels abaissant sur les faces d'un polyhèdre régulier des perpendiculaires, la somme de leurs cubes est constante. Mais je crois devoir abandonner aux jeunes géomètres cet exercice de méditation.

CHAPITRE QUATRIÈME.

De l'application de l'analyse algébrique à la recherche des lieux au plan et à la surface sphérique.

§. 100.

De même qu'on détermine la position d'un point sur un plan par les distances de ce point à deux droites données de position sur ce plan; aussi, on détermine la position d'un point dans l'espace par les distances de ce point à trois plans donnés de position dans l'espace, et en particulier par ses distances à trois plans perpendiculaires entr'eux. Ces *plans* sont appelés *coordonnés*; leur point de section est appelé *l'origine*; les perpendiculaires aux plans coordonnés abaissées d'un point sont appelées les *coordonnées* de ce point.

La commune section de deux des plans coordonnés est perpendiculaire au

troisième de ces plans. La perpendiculaire abaissée d'un point sur une de ces communes sections en retranche depuis l'origine une abscisse égale à l'ordonnée au plan auquel cette commune section est perpendiculaire. Il est donc indifférent de rapporter un point à trois plans coordonnés par des droites perpendiculaires à ces plans, ou de le rapporter à trois droites données de position perpendiculaires entr'elles, par des perpendiculaires à ces droites; en prenant pour coordonnées les abscisses retranchées de ces droites depuis leur point de section. Les communes sections des plans coordonnés sont appelés *axes coordonnés*. Les abscisses retranchées de ces axes depuis l'origine par les perpendiculaires abaissées sur eux depuis un point sont aussi les coordonnées de ce point; ces coordonnées sont ordinairement désignées par x, y, z. Les axes desquels ces coordonnées sont retranchées sont appelés les axes des x, des y et des z respectivement. Le plan sur lequel sont les axes des x et des y est appelé le plan des xy; on a de même le plan des xz et le plan des yz. Le point dont les coordonnées sont x, y, z, est souvent appelé pour abréger le point xyz.

FIG. 58. Il suit de ces définitions, que la somme des carrés des coordonnées d'un point est égale au carré de la distance de ce point à l'origine. Soient SX, SY, SZ, les trois axes coordonnés. Soit A un point duquel on abaisse sur le plan XSY des xy la perpendiculaire Az; du point z soient zx et zy perpendiculaires aux axes SX et SY des x et des y. Les droites Az, Sx, Sy, sont les coordonnées du point A. Dans le plan XSY, $Sx^2+Sy^2=Sz^2$; donc, $Sx^2+Sy^2+Az^2=Sz^2+Az^2=SA^2$; donc, $xx+yy+zz=SA^2$.

De là, $\frac{xx}{SA^2}+\frac{yy}{SA^2}+\frac{zz}{SA^2}=1$. Or, $\frac{x}{SA}$, $\frac{y}{SA}$, $\frac{z}{SA}$, sont respectivement les cosinus des angles que la droite SA fait avec les axes des x des y et des z; ou les sinus des angles que la même droite fait avec les plans coordonnés des yz, des xz, et des xy respectivement. Partant, la somme des carrés des coordonnées d'un point est égale au carré de la distance de ce point à l'origine; et la somme des carrés des sinus des angles qu'une droite menée par l'origine fait avec les plans coordonnés, ou la somme des carrés des cosinus des angles que cette droite fait avec les axes coordonnés, est égale au carré du rayon.

Corollaire. La somme des carrés des cosinus des angles que la même droite fait avec les plans coordonnés, ou la somme des carrés des sinus des angles qu'elle fait avec les axes des coordonnées, est double du carré du rayon.

Application. Soit une droite quelconque située dans l'espace. Par l'origine soit menée à cette droite une parallèle. Les inclinaisons de ces deux droites

aux

aux plans coordonnés ou aux axes coordonnés sont respectivement les mêmes. Partant, pour une droite quelconque menée dans l'espace, la somme des carrés des sinus de ses inclinaisons aux plans coordonnés, ou des carrés des cosinus de ces inclinaisons aux axes coordonnés, est égale au carré du rayon; et la somme des carrés des cosinus de ses inclinaisons aux plans coordonnés, ou celle des carrés des sinus de ces inclinaisons aux axes coordonnés, est double du carré du rayon.

§ 101.

La grandeur et la position d'une droite est déterminée par deux points; et en particulier par les coordonnées de ces points. De là, on peut déterminer dans les coordonnées de deux points d'une droite, rapportés à trois plans coordonnés, tant la distance de ces points que les inclinaisons de cette droite à ces plans, et les positions des points dans lesquels elle rencontre chacun de ces plans.

Soient A et A′ deux points dans l'espace. Soient Az, Sx, Sy, les coordonnées du premier de ces points. Az′, Sx′, Sy′, les coordonnées du second de ces points. $AA'^2=(A'z'-Az)^2+zz'^2=(A'z'-Az)^2+(Sx-Sx')^2+(Sy-Sy')^2$. Que les coordonnées du premier point comptées sur les axes SX, SY, SZ, soient a, b, c, respectivement; que les coordonnées du second point comptées sur les mêmes axes, soient a', b', c', respectivement; on a l'équation $AA'^2=(a-a')^2+(b-b')^2+(c-c')^2$. Savoir, le carré de la distance de deux points est égale à la somme des carrés des différences de leurs coordonnées correspondantes.

Par A soit menée à A′z′ une perpendiculaire Aa; elle sera parallèle au plan XSY et égale à zz′; l'angle A′Aa est l'inclinaison de AA′ au plan XSY. La tangente de cet angle est $\frac{A'a}{Aa}$; le carré de cette tangente est $\frac{(c'-c)^2}{(a-a')^2+(b-b')^2}$; le carré du sinus de cet angle est $\frac{(c'-c)^2}{(a-a')^2+(b-b')^2+(c-c')^2}$; le carré de son cosinus est $\frac{(a-a')^2+(b-b')^2}{(a-a')^2+(b-b')^2+(c-c')^2}$. On obtient de même la tangente, le sinus et le cosinus de chacun des angles que la droite AA′ fait avec les deux autres plans coordonnés.

En particulier; lorsque $c=c'$, la droite AA′ est parallèle au plan des xy; lorsqu'on a en même tems $a=a'$, $b=b'$, la droite AA′ est perpendiculaire au même plan.

Définitions. D'un point soit abaissée sur un plan une perpendiculaire;

le pied de cette perpendiculaire est appelé la projection orthographique, ou simplement la *projection du point* sur ce plan. De deux points d'une droite soient abaissées sur un plan des perpendiculaires; la droite qui joint les pieds de ces perpendiculaires sur ce plan est appelée la projection orthographique, ou simplement la *projection de la droite* sur ce plan. De même la projection d'une droite sur une droite est la partie de cette dernière comprise entre les perpendiculaires abaissées sur elle depuis les extrémités de la première. Une droite est à sa projection sur un plan comme le sinus total est au cosinus de son inclinaison à ce plan; et partant, la somme des carrés des projections d'une droite sur trois plans coordonnés est double du carré de cette droite; et la somme des carrés des projections d'une droite sur trois axes coordonnés est égale au carré de cette droite.

La droite zz' qui est la projection de la droite AA' sur le plan XSY des xy, est déterminée par les points z et z', et partant, par les coordonnées a, b, a', b', de ces points. Partant, l'équation de zz' sur le plan XSY est

$x \times \frac{b-b'}{zz'} + y \times \frac{a'-a}{zz'} = \frac{a'b-ab'}{zz'}$. Dans cette équation, $zz' = \sqrt{((a-a')^2+(b-b')^2)}$; $\frac{b-b'}{zz'}$ est le cosinus de l'angle que la perpendiculaire abaissée depuis l'origine sur la droite zz' fait avec l'axe des x; $\frac{a'-a}{zz'}$ est le sinus du même angle, ou le cosinus de l'angle que cette perpendiculaire fait avec l'axe des y; et $\frac{a'b-ab'}{zz'}$ est la perpendiculaire elle-même abaissée sur zz' depuis l'origine.

L'équation de la projection de AA' sur le plan YSZ des yz est de même,

$$y \times \frac{c-c'}{\sqrt{((b-b')^2+(c-c')^2}} + z \times \frac{b'-b}{\sqrt{((b-b')^2+(c-c')^2)}} = \frac{b'c-bc'}{\sqrt{((b-b')^2+(c-c')^2)}}.$$

L'équation de la projection de AA' sur le plan ZSX des zx est de même,

$$x \times \frac{c-c'}{\sqrt{((a-a')^2+(c-c')^2)}} + z \times \frac{a'-a}{\sqrt{((a-a')^2+(c-c')^2)}} = \frac{a'c-ac'}{\sqrt{((a-a')^2+(c-c')^2)}}.$$

Dans l'équation $x \times \frac{b-b'}{\sqrt{((b-b')^2+(a-a')^2)}} + y \times \frac{a'-a}{\sqrt{((b-b')^2+(a-a')^2)}} = \frac{a'b-ab'}{\sqrt{((b-b')^2+(a-a')^2)}}$;

soit $y=0$, $x=\frac{a'b-ab'}{b-b'}$

soit $x=0$, $y=\frac{a'b-ab'}{a'-a}$. On obtient ainsi les expressions des distances à

l'origine, des points dans lesquels la projection de AA' sur le plan XSY des xy rencontre les axes SX et SY des x et des y.

On obtient de même les points dans lesquels les projections de la droite AA' sur le plan XSZ des x et des z, et sur le plan YSZ des y et des z, rencontrent les axes SX et SZ des x et des z, et les axes SY et SZ des y et des z.

La connoissance de deux des projections d'une droite sur les plans coordonnés, détermine la position de cette ligne dans l'espace. En effet, par ces deux projections soient menés des plans perpendiculaires aux plans coordonnés sur lesquels elles sont situées, la commune section de ces deux plans est la droite dont elles sont les projections. Partant, deux quelconques des équations des projections d'une droite sur les plans coordonnés, forment un système d'équations qui est celui des équations de cette droite. En effet, deux quelconques de ces trois équations étant données, si on en chasse celle des inconnues qui leur est commune, on obtient entre les deux autres inconnues la troisième de ces équations.

§ 102.

Soient deux droites dont on connoît les positions par les angles qu'elles font avec les axes des coordonnées. On demande l'inclinaison de ces droites entr'elles.

Lorsque deux droites sont respectivement parallèles à deux autres, l'inclinaison des deux premières entr'elles est égale à l'inclinaison des deux dernières entr'elles. Partant, la question proposée peut toujours être ramenée au cas dans lequel les deux droites données de position passent l'une et l'autre par l'origine des coordonnées.

Soient donc SA, SA', deux droites menées par l'origine, et qui font avec les axes SX, SY, SZ, les angles α et α', ζ et ζ', γ et γ', respectivement. On demande l'angle qu'elles forment entr'elles.

Soient prises sur ces droites des longueurs quelconques SA et SA' égales entr'elles par exemple. Soient Az, A'z', perpendiculaires au plan YSX; et soient zx, z'x', zy, z'y', perpendiculaires à SX et à SY. On a

$AA'^2 = SA^2 + SA'^2 - 2AS \times SA' \cos. ASA' = 4SA^2 \sin.^2 \frac{1}{2} ASA'$. On a aussi,

$AA'^2 = SA^2 ((\cos. \alpha - \cos. \alpha')^2 + (\cos. \zeta - \cos. \zeta')^2 + (\cos. \gamma - \cos. \gamma')^2)$

Or, $\cos.^2 \alpha + \cos.^2 \zeta + \cos.^2 \gamma = 1$

$\cos.^2 \alpha' + \cos.^2 \zeta' + \cos.^2 \gamma' = 1.$ (§ 100).

Donc, $4 \sin.^2 \frac{1}{2} ASA' = 2 - 2 (\cos. \alpha \cos. \alpha' + \cos. \zeta \cos. \zeta' + \cos. \gamma \cos. \gamma')$;

De là, $\cos. ASA' = \cos. \alpha \cos. \alpha' + \cos. \zeta \cos. \zeta' + \cos. \gamma \cos. \gamma'$.

Digitized by Google

Savoir, le cosinus de l'angle que font entr'elles deux droites dont on connoît les positions relativement aux axes coordonnés, est égal à la somme des produits des cosinus de leurs inclinaisons aux mêmes axes.

Lorsque les deux droites sont perpendiculaires l'une à l'autre, on a l'équation $\cos.\alpha\cos.\alpha' + \cos.\mathfrak{C}\cos.\mathfrak{C}' + \cos.\gamma\cos.\gamma' = 0$.

Pour que les deux droites soient parallèles l'une à l'autre on doit avoir l'équation, $\cos.\alpha\cos.\alpha' + \cos.\mathfrak{C}\cos.\mathfrak{C}' + \cos.\gamma\cos.\gamma' = 1$.

Je passe à traiter de l'équation du plan.

§ 103.

De même que l'équation de la ligne droite a été obtenue (§ 59), par la grandeur de la perpendiculaire abaissée sur elle depuis l'origine, et par les angles que cette perpendiculaire fait avec les axes. Aussi, la manière la plus commode de déterminer l'équation d'une surface plane me paroît être de l'établir par la grandeur de la perpendiculaire abaissée sur elle depuis l'origine, et par les angles que cette perpendiculaire fait avec les axes coordonnés.

Soit donc $SD = d$ la perpendiculaire abaissée sur un plan Π depuis l'origine. Que cette perpendiculaire fasse avec les axes SX, SY, SZ, des x, des y, des z, des angles α, $\mathfrak{C}$, γ, respectivement. D'un point quelconque A du plan soient abaissées sur les axes SX, SY, SZ, des perpendiculaires qui retranchent de ces axes les abscisses Sx, Sy, Sz, lesquelles soient x, y, z, respectivement. On a (§ 18, 2.° Appl.) l'équation $SD = SA\cos.ASD = d = x\cos.\alpha + y\cos.\mathfrak{C} + z\cos.\gamma$; pour l'équation du plan.

Dans cette équation, les angles α, $\mathfrak{C}$, γ, que la perpendiculaire SD fait avec les axes SX, SY, SZ, sont aussi les angles que le plan Π fait avec les plans YSZ, XSZ, XSY, des yz, des xz, et des xy (1).

---

(1) Le procédé que je viens d'exposer pour établir l'équation du plan diffère de celui qui est ordinairement suivi dans les ouvrages qui traitent de l'application de l'algèbre à la géométrie; parmi lesquels il me suffira de citer l'excellent ouvrage de Biot, intitulé : *Essai de géométrie analytique appliquée aux courbes et aux surfaces du second ordre*. La manière dont je parviens à cette équation est tout à fait analogue à celle dont j'ai obtenu l'équation de la ligne droite; elle est fondée sur les mêmes principes, savoir, sur la doctrine du centre des moyennes distances. Cette équation détermine immédiatement la nature des coefficiens des indéterminées, et celle de la constante; elle me paroît fort lumineuse dans ses applications, et elle indique avec facilité la nature des résultats obtenus. Il me suffira de citer comme exemples, la recherche de l'inclinaison de deux plans dont on connoît les équations, la recherche de l'équation du plan qui passe par trois points donnés, dans les coordonnées de ces points;

§ 104.

L'équation du plan que je viens de déterminer est tirée des propriétés du centre des moyennes distances développées dans la dissertation préliminaire, et de leur application aux parallélipipèdes. On peut éclaircir cette équation d'une manière géométrique, en admettant un principe connu de la trignonométrie sphérique, tel qu'il suit.

Lemme connu. Soit un angle solide triangulaire dans lequel deux des faces sont perpendiculaires l'une à l'autre. Le produit du rayon par le cosinus de la face opposée à l'angle droit, est égal au produit des cosinus des deux autres faces.

Soit S l'origine. Soit SP la perpendiculaire au plan Π abaissée depuis l'origine. Fig. 59. Soit SP′ la perpendiculaire abaissée de l'origine sur la commune section du plan Π et du plan XSY des x et des y. Soit M un point quelconque du plan Π. Du point M soit MQ perpendiculaire au plan XSY ; et soit Qx perpendiculaire à SX ; soit aussi QQ′ perpendiculaire à P′X, et soit Q′x′ perpendiculaire à SX ; enfin, soit Qq perpendiculaire à Q′x′ ou parallèle à SX. Soit menée MQ′.

SP = SP′cos. PSP′ = (Sx′cos. P′SX + Q′x′sin. P′SX) cos. PSP′ (§ 59)

= ((Sx + xx′)cos. P′SX + (Qx + Q′q)sin. P′SX) cos. PSP′

= (Sxcos. P′SX + Qxsin. P′SX)cos. PSP′ + (xx′cos. P′SX + Q′qsin. P′SX)cos. PSP′.

Or, Sx cos. P′SX cos. PSP′ = Sx cos. PSX

Qx sin. P′SX cos. PSP′ = Qx cos. PSY ;

et puisque P′SX = Q′Qq ; xx′ cos. P′SX + Q′q sin. P′SX = QQ′ = MQ tang. PSP′

et (xx′ cos. P′SX + Q′q sin. P′SX) cos. PSP′ = MQ sin. PSP′ = MQ cos. PSZ,

Donc, SP = Sx cos. PSX + Qx cos. PSY + MQ cos. PSZ

Ou, $d = x \cos. PSX + y \cos. PSY + z \cos. PSZ$

$= x \cos. \alpha + y \cos. \zeta + z \cos. \gamma.$

§ 105.

Dans l'équation du plan $x \cos. \alpha + y \cos. \zeta + z \cos. \gamma = d$; soit $z = 0$. Les points du plan correspondans à cette supposition sont situés sur le plan XSY des x et des y. Partant, on obtient l'équation de la commune section du plan Π

---

et en général la recherche de l'équation du plan qui passe par des points donnés ou qui touche des sphères données, en nombre suffisant pour le déterminer.

L'auteur profond de la *Mécanique analytique* a été appelé (pag. 33) à considérer sous cette forme l'équation d'un plan qui passe par l'origine des coordonnées, dans lequel cas d=o.

et du plan XSY, laquelle est $d = x \cos. PSX + y \cos. PSY = x \cos. \alpha + y \cos. \zeta$. Or, $d = SP' \cos. PSP'$; donc, $SP' \cos. PSP' = x \cos. PSX + y \cos. PSY$.

Or, $\cos. PSX = \cos. PSP' \cos. P'SX$
$\cos. PSY = \cos. PSP' \cos. P'SY$; donc, $SP' = x \cos. P'SX + y \cos. P'SY$;

conformément à l'équation de la ligne droite (§ 59).

On détermine de même les équations des communes sections du plan Π et de chacun des deux autres plans coordonnés.

Soit $z = o$, $y = o$; $d = x \cos. PSX = x \cos. \alpha$; $x = d \sec. \alpha$

$z = o$, . . $x = o$ . . . . . $y = d \sec. \zeta$

$y = o$, $x = o$ . . . . . $z = d \sec. \gamma$

On détermine ainsi les distances SX, SY, SZ à l'origine, des points dans lesquels le plan Π rencontre les axes SX, SY, SZ, des x, des y, et des z.

Item, $XY^2 = SX^2 + SY^2 = dd \sin.^2 PSZ \sec.^2 PSX \sec.^2 PSY$

$XY = d \sin. \gamma \sec. \alpha \sec. \zeta$

$XZ = d \sin. \zeta \sec. \alpha \sec. \gamma$

$YZ = d \sin. \alpha \sec. \zeta \sec. \gamma$

$2\,XSY = dd \sec. PSX \sec. PSY = dd \sec. \alpha \sec. \zeta$

$2\,XSZ = dd \sec. PSX \sec. PSZ = dd \sec. \alpha \sec. \gamma$

$2\,YSZ = dd \sec. PSY \sec. PSZ = dd \sec. \zeta \sec. \gamma$.

§ 106.

La recherche de l'inclinaison de deux plans dont on connoît les équations, est ramenée à la recherche de l'inclinaison de deux droites dont on connoît les équations.

En effet, par l'origine soient menées des perpendiculaires aux deux plans proposés. L'inclinaison de ces perpendiculaires entr'elles est égale à l'inclinaison des deux plans entr'eux. Or, les inclinaisons de ces deux droites aux trois axes coordonnés sont respectivement égales aux complémens des inclinaisons de ces plans aux mêmes axes; et partant, elles sont respectivement égales aux inclinaisons de ces plans aux plans coordonnés correspondans. Ainsi, l'inclinaison à l'axe SZ des z de la perpendiculaire au plan Π est égale à l'inclinaison de ce plan Π au plan XSY des xy, ou au complément de son inclinaison au même axe SZ des z. Partant, les formules du § 102 s'appliquent à la détermination proposée.

Que l'équation d'un des plans Π soit $x \cos. \alpha + y \cos. \zeta + z \cos. \gamma = d$.

Que l'équation de l'autre plan Π' soit $x \cos. \alpha' + y \cos. \zeta' + z \cos. \gamma' = d'$.

Les coordonnées du pied P de la perpendiculaire d abaissée de l'origine sur le plan Π, sont $d\cos.\alpha$, $d\cos.\zeta$, $d\cos.\gamma$. Les coordonnées du pied P' de la perpendiculaire d' abaissée de l'origine sur le plan Π' sont de même, $d'\cos.\alpha'$, $d'\cos.\zeta'$, $d'\cos.\gamma'$. Le carré de la distance PP' des pieds de ces deux perpendiculaires est $(d\cos.\alpha-d'\cos.\alpha')^2+(d\cos.\zeta-d'\cos.\zeta')^2+(d\cos.\gamma-d'\cos.\gamma')^2 = dd+d'd'-2dd'(\cos.\alpha\cos.\alpha'+\cos.\zeta\cos.\zeta'+\cos.\gamma\cos.\gamma')$. Or, dans le triangle PSP', $PP'^2=dd+d'd'-2dd'\cos.PSP'$; donc, $\cos.PSP'=\cos.\alpha\cos.\alpha'+\cos.\zeta\cos.\zeta'+\cos.\gamma\cos.\gamma'$.

Les deux plans Π et Π' sont parallèles entr'eux, lorsque $\cos.\alpha\cos.\alpha'+\cos.\zeta\cos.\zeta'+\cos.\gamma\cos.\gamma'=1$.

Ces deux plans sont perpendiculaires l'un à l'autre, lorsqu'on a l'équation, $\cos.\alpha\cos.\alpha'+\cos.\zeta\cos.\zeta'+\cos.\gamma\cos.\gamma'=0$.

§ 107.

Soient deux plans déterminés par leurs équations, $\begin{matrix} x\cos.\alpha+y\cos.\zeta+z\cos.\gamma=d \\ x\cos.\alpha'+y\cos.\zeta'+z\cos.\gamma'=d' \end{matrix}$

On demande l'équation de la droite qui est leur commune section.

De ces deux équations, soit éliminée successivement chacune des inconnues; on obtient les trois équations.

$$x(\cos.\alpha\cos.\gamma'-\cos.\alpha'\cos.\gamma)+y(\cos.\zeta\cos.\gamma'-\cos.\zeta'\cos.\gamma)=d\cos.\gamma'-d'\cos.\gamma;$$

$$x(\cos.\alpha\cos.\zeta'-\cos.\alpha'\cos.\zeta)+z(\cos.\zeta'\cos.\gamma-\cos.\zeta\cos.\gamma')=d\cos.\zeta'-d'\cos.\zeta.$$

$$y(\cos.\alpha'\cos.\zeta-\cos.\alpha\cos.\zeta')+z(\cos.\alpha'\cos.\gamma-\cos.\alpha\cos.\gamma')=d\cos.\alpha'-d'\cos.\alpha.$$

Pour ramener ces équations de deux lignes droites à la forme du § 59; il faut diviser les membres de chacune d'elles par la racine carrée de la somme des carrés des coefficiens des indéterminées dans ces équations. Ainsi

$$\frac{\cos.\alpha\cos.\gamma'-\cos.\alpha'\cos.\gamma}{\sqrt{((\cos.\alpha\cos.\gamma'-\cos.\alpha'\cos.\gamma)^2+(\cos.\zeta\cos.\gamma'-\cos.\zeta'\cos.\gamma)^2)}}$$ est le cosinus de l'angle que la projection de la droite cherchée sur le plan des xy fait avec l'axe des x. La perpendiculaire abaissée sur cette projection depuis l'origine est

$$\frac{d\cos.\gamma'-d'\cos.\gamma}{\sqrt{((\cos.\alpha\cos.\gamma'-\cos.\alpha'\cos.\gamma)^2+(\cos.\zeta\cos.\gamma'-\cos.\zeta'\cos.\gamma)^2)}}$$

Remarque. On détermine de même dans ses coordonnées le point qui est la commune section de trois plans dont on connoît les équations, en cherchant les valeurs de x, y et z dans les trois équations.

$x\cos.\alpha + y\cos.\zeta + z\cos.\gamma = d$

$x\cos.\alpha' + y\cos.\zeta' + z\cos.\gamma' = d'$

$x\cos.\alpha'' + y\cos.\zeta'' + z\cos.\gamma'' = d''$. On trouve par exemple,

$$x = \frac{d\cos.\zeta'\cos.\gamma'' + d'\cos.\zeta''\cos.\gamma + d''\cos.\zeta\cos.\gamma' - d\cos.\zeta''\cos.\gamma' - d'\cos.\zeta\cos.\gamma'' - d''\cos.\zeta'\cos.\gamma}{\cos.\alpha\cos.\zeta'\cos.\gamma'' + \cos.\alpha'\cos.\zeta''\cos.\gamma + \cos.\alpha''\cos.\zeta\cos.\gamma' - \cos.\alpha\cos.\zeta''\cos.\gamma' - \cos.\alpha'\cos.\zeta\cos.\gamma'' - \cos.\alpha''\cos.\zeta'\cos.\gamma}$$

§ 108.

Soit un point déterminé par ses coordonnées, et soit un plan déterminé par son équation. On peut déterminer la perpendiculaire abaissée de ce point sur ce plan.

Soit Π le plan dont l'équation est $x\cos.\alpha + y\cos.\zeta + z\cos.\gamma = d$. Soient a, b, c, les coordonnées d'un point ; et soit D la perpendiculaire abaissée de ce point sur le plan Π.

Les coordonnées du pied de la perpendiculaire abaissée du point abc sont $a + D\cos.\alpha$, $b + D\cos.\zeta$, $c + D\cos.\gamma$. Puisque ce pied est sur le plan proposé, on a l'équation $(a + D\cos.\alpha)\cos.\alpha + (b + D\cos.\zeta)\cos.\zeta + (c + D\cos.\gamma)\cos.\gamma = d$. ou, $a\cos.\alpha + b\cos.\zeta + c\cos.\gamma + D = d$. $D = d - (a\cos.\alpha + b\cos.\zeta + c\cos.\gamma)$.

L'expression $a\cos.\alpha + b\cos.\zeta + c\cos.\gamma$, est celle de la perpendiculaire abaissée du point abc sur un plan parallèle au plan Π et mené par l'origine ; ou bien, c'est la perpendiculaire abaissée de l'origine sur un plan Π' parallèle au plan Π et mené par le point abc.

Cette expression est relative à la supposition que le plan Π' est entre l'origine et le plan Π. Si l'origine est entre les plans Π et Π', les coordonnées a, b, c, changent de signes, et la perpendiculaire abaissée du point abc devient $d + (a\cos.\alpha + b\cos.\zeta + c\cos.\gamma)$. Si le plan Π est entre l'origine et le plan Π'; la perpendiculaire D change de signe, et son expression devient $D = a\cos.\alpha + b\cos.\zeta + c\cos.\gamma - d$.

§. 109.

De l'équation du plan $x\cos.\alpha + y\cos.\zeta + z\cos.\gamma = d$, on tire aisément la conversion des coordonnées relatives à un certain système d'axes rectangulaires, dans les coordonnées relatives à un autre système d'axes rectangulaires ayant la même origine.

En

En effet, soient SX, SY, SZ, les axes coordonnés d'un des systèmes, et soient x, y, z, les coordonnées correspondantes. Soient SX', SY', SZ', les axes coordonnés d'un autre système, et soient x', y', z', les coordonnées correspondantes. Que l'axe SX fasse avec les axes SX', SY', SZ', les angles α, α', α'',

Que l'axe SY fasse avec les mêmes axes les angles ζ, ζ', ζ'',

Que l'axe SZ fasse avec les mêmes axes les angles γ, γ', γ'',

Par l'extrémité X de l'axe SX $= x$ soit conçu un plan perpendiculaire à SX, on a l'équation $x = x' \cos.\alpha + y' \cos.\alpha' + z \cos.\alpha''$. On a de même

$$y = x' \cos.\zeta + y' \cos.\zeta' + z' \cos.\zeta''$$

$$z = x' \cos.\gamma + y' \cos.\gamma' + z' \cos.\gamma''.$$ Partant, les coordonnées du premier système sont rapportées aux coordonnées du second ; et réciproquement, les coordonnées du second sont rapportées aux coordonnées du premier par les équations $x' = x \cos.\alpha + y \cos.\zeta + z \cos.\gamma$

$$y' = x \cos.\alpha' + y \cos.\zeta' + z' \cos.\gamma'$$

$$z' = x \cos.\alpha'' + y \cos.\zeta'' + z'' \cos.\gamma''.$$

Le cas où les deux systèmes n'ont pas la même origine, est aisément ramené au cas de l'identité de l'origine, en altérant les coordonnées d'un des systèmes relatives à une même origine, par addition ou par soustraction, des coordonnées de la nouvelle origine.

§ 110.

De même qu'une ligne droite est déterminée par deux points, aussi un plan est déterminé par trois points (non en ligne droite) dont on connoît les positions par leurs coordonnées. Soient ces trois points abc, $a'b'c'$, $a''b''c''$. Soit d la perpendiculaire abaissée depuis l'origine sur le plan cherché Π. Soient x, y, z, les inclinaisons de cette perpendiculaire aux trois axes SX, SY, SZ, des x, des y et des z respectivement. Puisque les trois points donnés doivent être sur le plan Π, on a les trois équations $a \cos.x + b \cos.y + c \cos.z = d$

$$a' \cos.x + b' \cos.y + c' \cos.z = d$$

$$a'' \cos.x + b'' \cos.y + c'' \cos.z = d.$$

Ces trois équations, combinées avec la quatrième $\cos.^2x + \cos.^2y + \cos.^2z = 1$; suffisent pour déterminer les quatre inconnues x, y, z et d. Pour abréger soit fait

$$\frac{bc'+b'c''+b''c}{-(b'c+b''c'+bc'')} = A; \quad \frac{ca'+c'a''+c''a}{-(c'a+c''a'+ca'')} = B; \quad \frac{ab'+a'b''+a''b}{-(a'b+a''b'+ab'')} = C;$$ on trouve

$$\cos.x = \frac{A}{\sqrt{(AA+BB+CC)}}, \cos.y = \frac{B}{\sqrt{(AA+BB+CC)}}; \cos.z = \frac{C}{\sqrt{(AA+BB+CC)}}.$$

Digitized by Google

$$d=\frac{ab'c''+a'b''c+a''bc'-(ab''c'+a'bc''+a''b'c)}{\sqrt{(AA+BB+CC)}}$$

Remarque 1.re. Quand on exécute la somme AA+BB+CC, on la trouve composée comme il suit, d'une manière symétrique dans les coordonnées des trois points.

$$\begin{array}{lllll}
aab'b' & a'a'bb & a''a''bb & bbc'c' & b''b''cc\\
aab''b'' & a'a'b''b'' & a''a''b'b' & bbc''c'' & b''b''c'c'\\
aac'c' & a''a''cc & a''a''cc & b'b'cc & \\
aac''c'' & a'a'c''c'' & a''a''c'c' & b'b'c''c'' &
\end{array}$$

$$-2\begin{cases}
aab'b'' & aa'bb' & aa'b''b'' & bbc'c'' & bb'c''c''\\
aac'c'' & aa'cc' & aa'c''c'' & bb'cc' & bb''c'c'\\
a'a'bb'' & aa''bb'' & aa''b'b' & bb''cc'' & b'b''cc\\
a'a'cc'' & aa''cc'' & aa''c'c' & b'b'cc'' & \\
a''a''bb' & a'a''b'b'' & a'a''bb & b'b''c'c'' & \\
a''a''cc' & a'a''c'c'' & a'a''cc & b''b''cc' &
\end{cases}$$

$$+2\begin{cases}
aa'bb'' & aa''bb' & a'a''bb' & bb'cc''\\
aa'b'b'' & aa''b'b'' & a'a''bb'' & bb'c'c''\\
aa'cc'' & aa''cc' & a'a''cc' & bb''cc'\\
aa'c'c'' & aa''c'c'' & a'a''cc'' & bb''c'c''\\
 & & & b'b''cc'\\
 & & & b'b''cc''
\end{cases}$$

Remarque 2.e La détermination de l'équation d'un plan dans les coordonnées de trois de ses points, est un des problèmes fondamentaux de l'application de l'analyse algébrique à la partie de la géométrie relative aux plans. Je vais proposer quelques exemples de ses applications.

Soient les quatre sommets d'un tétraèdre donnés de position par leurs coordonnées (ou soient quatre points donnés de position dans l'espace). On peut déterminer dans ces coordonnées chacune des arrêtes de ce tétraèdre, chacun des angles plans de ses faces, chacune de ses faces et leurs inclinaisons deux à deux, chacune des perpendiculaires abaissées des sommets sur les faces opposées, les rayons des sphères qui lui sont inscrites et circonscrites, et la capacité du tétraèdre.

Soient cinq points donnés de position dans l'espace par leurs coordonnées. On peut déterminer tout ce qui appartient aux positions mutuelles de ces points entr'eux, et à celles des droites et des plans qui les joignent. En particulier,

on peut déterminer l'inclinaison mutuelle de deux plans, dont l'un passe par trois de ces points, et dont l'autre passe par les deux points restans et par l'un des premiers.

Soient six points donnés de position dans l'espace par leurs coordonnées. On peut déterminer tout ce qui appartient aux positions mutuelles de ces points entr'eux et à celles des droites et des points qui les joignent. En particulier, on peut déterminer l'inclinaison mutuelle de deux plans, dont l'un passe par trois de ces points et dont l'autre passe par les trois points restans (1).

§ 111.

Il n'entre pas dans le plan de cet ouvrage d'insister sur les conséquences nombreuses et importantes qu'on peut tirer des propositions précédentes. Je me contenterai d'en exposer un petit nombre relatives à la polyhèdrométrie.

Définition. Que les côtés d'une figure rectiligne soient projetés orthographiquement sur un plan : la figure formée sur ce plan par les projections de ces côtés est appelée la *projection de la figure* sur ce plan.

Eclaircissement. Soit un prisme droit coupé obliquement par un plan. La base de ce prisme est la projection de la section sur le plan de la base.

Lemme connu. Une figure plane est à sa projection sur un plan, comme le sinus total est au cosinus de l'inclinaison du plan de cette figure au plan sur lequel on la projette.

Application. Le carré (2) d'une figure rectiligne est égal à la somme des carrés de ses projections sur trois plans rectangulaires.

En effet, soit F une figure rectiligne ; soient P, P′, P″, ses projections sur trois plans rectangulaires. Soient α, ζ, γ', les inclinaisons du plan de cette figure aux trois plans coordonnés. On a les trois équations,

$$P = F\cos.\alpha \qquad P'P = FF\cos.^2\alpha$$
$$P' = F\cos.\zeta \qquad P'P' = FF\cos.^2\zeta$$
$$P'' = F\cos.\gamma \qquad P''P'' = FF\cos.^2\gamma$$

$$PP + P'P' + P''P'' = FF(\cos.^2\alpha + \cos.^2\zeta + \cos.^2\gamma) = FF.$$ Voyez

(1) Ces applications et plusieurs autres intéressantes, ont été traitées immédiatement et par un procédé indépendant de la doctrine des coordonnées, par le célèbre Carnot, dans son beau Mémoire qui a pour titre : *Sur la relation qui existe entre les distances respectives de cinq points quelconques pris dans l'espace ;* Paris, 1806.

(2) Je prends l'expression, *carré d'une figure rectiligne*, dans le sens numérique. Il est aisé de lui donner une signification géométrique, en substituant aux figures mentionnées dans la proposition des droites qui soient entr'elles comme ces figures.

Digitized by Google

pour des applications ultérieures mon Mémoire sur la Polyhèdrométrie, publié parmi les Mémoires présentés à l'Institut.

§ 112.

D'après le lemme du § précédent, on auroit pu déterminer l'inclinaison à l'un des plans coordonnés, du plan qui passe par trois points déterminés par leurs coordonnées.

1.° Soit cherchée la surface du triangle qui a pour sommets les trois points donnés, exprimée dans ses côtés, dont les carrés sont $(a-a')^2+(b-b')^2+(c-c')^2$; $(a-a'')^2+(b-b'')^2+(c-c'')^2$; $(a'-a'')^2+(b'-b'')^2+(c'-c'')^2$.

2.° Soient cherchés les côtés de la projection du triangle proposé sur l'un des plans coordonnés; par exemple, sur le plan XSY. Les carrés de ces côtés sont $(a-a')^2+(b-b')^2$; $(a-a'')^2+(b-b'')^2$; $(a'-a'')^2+(b'-b'')^2$.

3.° Soit cherchée la surface de cette projection dans ses côtés.

4.° Le rapport de la surface du triangle proposé à celle de sa projection est égal au rapport du sinus total au cosinus de son inclinaison au plan XSY.

Cette recherche peut aussi se faire un peu autrement comme il suit.

Lemme. Soient trois points (non situés en ligne droite) donnés de position sur un plan. On demande la droite sur laquelle abaissant des perpendiculaires depuis les points donnés elles soient entr'elles dans des rapports donnés.

Fig. 60. Soient B, B', B'', trois points (non situés en ligne droite) donnés de position sur un plan; on demande la droite sur laquelle abaissant les perpendiculaires BP, B'P', B''P'', depuis les points donnés, elles soient entr'elles dans les rapports donnés.

Analyse. Que les droites B'B, B'B'', rencontrent la droite cherchée en C et en C''. Le rapport donné de BP à B'P' est égal au rapport de BC à B'C; donc, le rapport de BC à B'C est donné, et partant le point C est donné de position. De la même manière, le point C'' est donné de position. Donc, la droite CC'' est donnée de position.

Construction. Sur les droites B'B et B'B'' soient déterminés les points C et C'', tels, que les rapports de B'C à BC et de B'C'' à B''C'', soient respectivement égaux aux rapports donnés de B'P' à BP et à B''P''. Soit menée CC''; elle est la droite cherchée.

Démonstration. Elle découle de l'analyse.

Application. Des points A, A', A'' (non en ligne droite) donnés de position dans l'espace, soient abaissées sur un des plans coordonnés les perpendiculaires AB, A'B', A''B'', et soient BP, B'P', B''P'', perpendiculaires à la commune section du

Digitized by Google

du plan AA'A'' et de ce plan coordonné. Chacun des angles APB, A'P'B', A''P''B'', est égal à l'inclinaison de ces deux plans; partant, les triangles rectangles APB, A'P'B', A''P''B'', sont équiangles entr'eux, et les droites BP, B'P', B''P'', sont entr'elles comme les droites données AB, A'B', A''B''. Partant, la détermination de la droite CC'' est réduite au lemme.

Il est aisé d'appliquer le calcul à cette détermination géométrique.

§ 113.

La détermination de la distance de deux points dans les coordonnées de ces points, conduit à l'équation de la surface sphérique.

Soient a, b, c, les coordonnées du centre d'une sphère dont le rayon est r. Soient x, y, z, les coordonnées d'un point situé sur la surface de la sphère. Le carré de la distance de ce point au centre de la sphère est $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2$. On a l'équation $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=rr$.

Que l'origine soit au centre de la sphère, l'équation de sa surface devient $xx+yy+zz=rr$.

Dans l'équation $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=rr$; soit $x=o$; $(y-b)^2+(z-c)^2=rr-aa$. Cette équation (si elle est possible), est celle d'un cercle dont les coordonnées du centre sont b et c et dont le carré du rayon est $rr-aa$; mais elle est aussi l'équation de la section de la sphère par le plan des y et des z; donc, la section de la sphère par un des plans coordonnés (si elle est possible) est un cercle. On a de même, $(x-a)^2+(z-c)^2=rr-bb$,

$(x-a)^2+(y-b)^2=rr-cc$, pour les équations des communes sections de la surface sphérique et des plans des xz et des xy respectivement.

En général. Soit $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=rr$ l'équation d'une surface sphérique; et soit $x\cos.\alpha+y\cos.\zeta+z\cos.\gamma=d$, l'équation d'un plan. On peut déterminer l'équation de la section de la surface sphérique par ce plan (si elle a lieu).

En effet; $x\cos.\alpha=d-(y\cos.\zeta+z\cos.\gamma)$

$$(x-a)\cos.\alpha=d-a\cos.\alpha-(y\cos.\zeta+z\cos.\gamma).$$

$$(x-a)^2\cos.\alpha^2=(d-a\cos.\alpha)^2-2(d-a\cos.\alpha)(y\cos.\zeta+z\cos.\gamma)+(y\cos.\zeta+z\cos.\gamma)^2.$$

$$=rr\cos.^2\alpha-(y-b)^2\cos.^2\alpha-(z-c)^2\cos.^2\alpha.$$

De là;

$$\begin{aligned}&yy\sin.^2\gamma\\&+2yz\cos.\zeta\cos.\gamma\\&-2y(d\cos.\zeta-a\cos.\alpha\cos.\zeta+b\cos.^2\alpha)\\&+zz\sin.^2\zeta\\&-2z(d\cos.\gamma-a\cos.\alpha\cos.\gamma+c\cos.^2\alpha).\end{aligned}=\begin{aligned}&\cos.^2\alpha(rr-(aa+bb+cc))\\&+2ad\cos.\alpha-dd\end{aligned}$$

Cette équation est celle de la projection de la section de la sphère par le plan proposé sur le plan des yz. On détermine de même les équations des projections de cette section sur le plan des xy et sur celui des xz.

Que l'origine soit au centre de la sphère. Cette équation devient $yy\sin.^2\gamma + 2yz\cos.\zeta\cos.\gamma - 2dy\cos.\zeta + zz\sin.^2\zeta - 2dz\cos.\gamma = rr\cos.^2\alpha - dd$. Ce n'est pas ici le lieu de discuter cette équation générale ; cet examen trouvera sa place dans l'ouvrage que je me propose de publier après celui-ci, en traitant de la surface cylindrique et de la surface conique.

Cette équation générale se simplifie par des suppositions particulières. Que le plan coupant soit parallèle au plan de yz, et partant perpendiculaire à l'axe des x ; alors $\begin{matrix}\sin.\zeta = 1\\ \cos.\zeta = 0\end{matrix}$; $\begin{matrix}\sin.\gamma = 1\\ \cos.\gamma = 0\end{matrix}$ $\cos.\alpha = 1$; $yy + zz = rr - dd$. Cette équation est celle d'un cercle dont le carré du rayon est $rr-dd$, et dont le centre est le pied de la perpendiculaire abaissée sur le plan coupant depuis le centre de la sphère.

En prenant le centre de la sphère pour l'origine des coordonnées ; l'équation d'un plan qui touche la sphère est $x\cos.\alpha + y\cos.\zeta + z\cos.\gamma = r$.

§ 114.

Problème. Soient deux sphères données de grandeur et de position déterminées par leurs équations. On demande l'équation qui détermine leur intersection s'il y a lieu.

Soient $\begin{matrix}(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = rr\\ (x-a')^2+(y-b')^2+(z-c')^2 = r'r'\end{matrix}$ les équations des deux sphères. De ces deux équations on obtient

$$2x(a-a')+2y(b-b')+2z(c-c') = \begin{matrix}a\,a+b\,b+c\,c-rr\\ -(a'a'+b'b'+c'c'-r'r')\end{matrix}$$

Or, $(a-a')^2+(b-b')^2+(c-c')$ est le carré de la distance des centres des deux sphères ; soit cette distance d, on a l'équation

$$x\times\frac{a-a'}{d}+y\times\frac{b-b'}{d}+z\times\frac{c-c'}{d} = \frac{\begin{matrix}a\,a+b\,b+c\,c-r\,r\\ -(a'a'+b'b'+c'c'-r'r')\end{matrix}}{2d}$$

Cette équation est celle d'un plan, tel, que la perpendiculaire abaissée sur lui depuis l'origine fait avec les axes des x, des y et des z des angles dont les cosinus sont $\frac{a-a'}{d}, \frac{b-b'}{d}, \frac{c-c'}{d}$, et cette perpendiculaire elle-même est $\frac{\begin{matrix}a\,a+b\,b+c\,c-rr\\ -(a'a'+b'b'+c'c'-r'r')\end{matrix}}{2d}$

Mais ; $\frac{a-a'}{d}$, $\frac{b-b'}{d}$, $\frac{c-c'}{d}$, sont respectivement les cosinus des angles que la

droite qui joint les centres des deux sphères fait avec les axes ; partant, le plan dont on a l'équation est perpendiculaire à la droite qui joint les centres.

Soit pris pour origine le centre de la sphère dont le rayon est r, $a=o$, $b=o$, $c=o$. Soit pris pour l'un des axes tel que celui des x, la droite qui joint les centres des deux sphères, $a'=d$; on a $x=\frac{dd+rr-r'r'}{2d}$; ainsi que cela doit être.

Puisque la recherche de l'intersection de deux sphères est ramenée à la recherche de l'intersection d'un plan et d'une sphère ; et que l'intersection d'une sphère et d'un plan (si elle a lieu) est un cercle ; l'intersection de deux sphères (si elle a lieu) est aussi un cercle.

On détermine de même l'intersection (si elle a lieu) de trois sphères données de grandeur et de position au moyen des trois équations suivantes,

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=rr.$$
$$(x-a')^2+(y-b')^2+(z-c')^2=r'r'.$$
$$(x-a'')^2+(y-b'')^2+(z-c'')^2=r''r''.$$

§ 115.

Soient deux points donnés de position par leurs coordonnées, et soit une sphère donnée de grandeur et de position par les coordonnées de son centre et par la grandeur de son rayon. On demande l'équation du plan qui passe par ces deux points et qui touche cette sphère.

Soient a, b, c; a', b', c'; les coordonnées des points donnés ; et soient a'', b'', c'', les coordonnées du centre de la sphère, dont le rayon est r. Soit $x\cos.\alpha+y\cos.\zeta+z\cos.\gamma=d$ l'équation du plan cherché.

Puisque le plan cherché doit passer par les points abc, a'b'c', on a les deux équations, $a\cos.\alpha+b\cos.\zeta+c\cos.\gamma=d$.

$a'\cos.\alpha+b'\cos.\zeta+c'\cos.\gamma=d$.

La perpendiculaire abaissée du centre de la sphère sur le plan cherché, est $d-(a''\cos.\alpha+b''\cos.\zeta+c''\cos.\gamma)=r$.

Au moyen de ces trois équations on détermine les trois inconnues cos. α, cos. ζ, cos. γ, en d et en r, et dans les coordonnées des points donnés et du centre. Puis au moyen de l'équation $\cos.^2\alpha+\cos.^2\zeta+\cos.^2\gamma=1$, on détermine d en r et dans les mêmes coordonnées.

On détermine de même l'équation du plan qui touche trois sphères, données par les grandeurs de leurs rayons et par les coordonnées de leurs centres.

En effet, soient a,b,c; a', b', c'; a'', b'', c''; les coordonnées des centres des

sphères proposées; soient r, r', r'', leurs rayons. Soit $x\cos.\alpha+y\cos.\zeta+z\cos.\gamma=d$ l'équation du plan cherché. On a les quatre équations

$d-(a\cos.\alpha+b\cos.\zeta+c\cos.\gamma)=r$

$d-(a'\cos.\alpha+b'\cos.\zeta+c'\cos.\gamma)=r'$

$d-(a''\cos.\alpha+b''\cos.\zeta+c''\cos.\gamma)=r''$

$\cos.^2\alpha+\cos.^2\zeta+\cos.^2\gamma=1$; au moyen desquelles on détermine les quatre inconnues, $\cos.\alpha$, $\cos.\zeta$, $\cos.\gamma$, d.

§. 116.

De même que la circonférence d'un cercle est déterminée par trois points (non en ligne droite); la surface de la sphère est déterminée par quatre points qui, trois à trois, ne sont pas en ligne droite, et qui ne sont pas tous dans un même plan.

Soient a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c''; a''', b''', c''', les coordonnées des quatre points donnés. Soient x, y, z, les coordonnées du centre de la sphère cherchée, et soit r son rayon.

On a les quatre équations, $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=rr$

$(x-a')^2+(y-b')^2+(z-c')^2=rr$

$(x-a'')^2+(y-b'')^2+(z-c'')^2=rr$

$(x-a''')^2+(y-b''')^2+(z-c''')^2=rr.$

Au moyen de ces quatre équations, on détermine les coordonnées x, y, z, par trois équations du premier degré. Puis, on détermine le carré du rayon dans ces coordonnées.

On détermine de même le centre et le rayon d'une sphère qui touche les faces d'un tétrahèdre données de position par leurs équations. On a les quatre équations $r=d-(x\cos.\alpha+y\cos.\zeta+z\cos.\gamma)$

$r=d'-(x\cos.\alpha'+y\cos.\zeta'+z\cos.\gamma')$

$r=d''-(x\cos.\alpha''+y\cos.\zeta''+z\cos.\gamma'')$

$r=d'''-(x\cos.\alpha'''+y\cos.\zeta'''+z\cos.\gamma''')$; au moyen desquelles on détermine les quatre inconnues x, y, z, r.

En général; au moyen des équations de la sphère et du plan, on résout algébriquement tous les problèmes qu'on peut proposer sur une sphère qui doit passer par des points, ou toucher des plans et des sphères en nombre suffisant pour la déterminer; lequel nombre est quatre. Les questions auxquelles cet énoncé général donne lieu sont au nombre de seize. Ce problème général a été résolu par WIETE, puis par des mathématiciens anglais, tels que LAWSON, d'une manière géométrique remarquable par son élégance.

Après

Après avoir établi les notions préliminaires sur lesquelles est fondée la doctrine algébrique par laquelle on conçoit déterminés de position les points dans l'espace, les lignes droites et circulaires, et les surfaces planes et sphériques; et après avoir éclairci cette doctrine par quelques-unes de ses applications, je vais en montrer la liaison avec l'objet principal de cet ouvrage, en débutant par quelques exemples simples déjà traités géométriquement.

§ 117.

Problème. Soient deux points donnés par leurs coordonnées. On demande le lieu des points qui en sont également éloignés.

Soient a, b, c, les coordonnées d'un des points donnés. Soient a', b', c' les coordonnées du second point donné. Soient x, y, z les coordonnées d'un des points cherchés. Le carré de la distance des deux points donnés est $(a-a')^2+(b-b)^2+(c-c')^2$; soit cette distance d. Les carrés des distances du point cherché aux points donnés sont
$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2$ et $(x-a')^2+(y-b')^2+(z-c')^2$. Partant, on a l'équation
$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=(x-a')^2+(y-b')^2+(z-c')^2$; de laquelle on tire

$$x(a'-a)+y(b'-b)+z(c'-c)=\frac{a+a'}{2}(a'-a)+\frac{b+b'}{2}(b'-b)+\frac{c+c'}{2}(c'-c)\text{; ou}$$

$$x\frac{a'-a}{d}+y\frac{b'-b}{d}+z\frac{c'-c}{d}=\frac{a+a'}{2}\times\frac{a'-a}{d}+\frac{b+b'}{2}\times\frac{b'-b}{d}+\frac{c+c'}{2}\times\frac{c'-c}{d}.$$

Partant, le lieu cherché est un plan, tel, que la perpendiculaire à ce plan fait avec les axes des x, des y et des z des angles dont les cosinus sont $\frac{a'-a}{d}$, $\frac{b'-b}{d}$, $\frac{c'-c}{d}$; et la perpendiculaire abaissée sur ce plan depuis l'origine

$$\text{est } \frac{a+a'}{2}\times\frac{a'-a}{d}+\frac{b+b'}{2}\times\frac{b'-b}{d}+\frac{c+c'}{2}\times\frac{c'-c}{d};$$

$$\text{ou } \frac{a'+a}{2}\cos.\alpha+\frac{b'+b}{2}\cos.\beta+\frac{c'+c}{2}\cos.\gamma.$$

Or, la droite qui joint les points donnés fait aussi avec les axes des x, des et des z des angles dont les cosinus sont $\frac{a'-a}{d}$, $\frac{b'-b}{d}$, $\frac{c'-c}{d}$; donc la droite qui joint les points donnés est parallèle à la perpendiculaire au plan cherché; donc, elle est perpendiculaire à ce plan.

Les coordonnées du milieu de la droite qui joint les points donnés sont $\frac{a+a'}{2}$, $\frac{b+b'}{2}$, $\frac{c+c'}{2}$ respectivement. Donc, le plan cherché passe par le milieu de la droite qui joint les points donnés. Donc enfin, le lieu cherché

est le plan perpendiculaire à la droite qui joint les points donnés et élevé depuis son milieu.

On détermine de même la surface plane qui est le lieu des points dont la différence des carrés des distances à deux points donnés est constante, et égale à un espace S donné de grandeur.

§ 118.

Problème. Soient deux plans donnés de position par leurs équations; on demande le lieu des points de chacun desquels abaissant sur ces plans des perpendiculaires, leur rapport soit égal à un rapport donné.

Soient $x\cos.\alpha + y\cos.\zeta + z\cos.\gamma = d$

$x\cos.\alpha' + y\cos.\zeta' + z\cos.\gamma' = d'$ les équations des deux plans donnés. Soit le rapport donné des perpendiculaires abaissées sur ces plans celui de m à m'.

Soient x, y, z, les coordonnées d'un des points cherchés.

Les perpendiculaires abaissées sur les deux plans depuis le point xyz sont respectivement $d-(x\cos.\alpha + y\cos.\zeta + z\cos.\gamma)$

$d'-(x\cos.\alpha' + y\cos.\zeta' + z\cos.\gamma')$ Partant, on a la proportion $(d-(x\cos.\alpha + y\cos.\zeta + z\cos.\gamma)) : (d'-(x\cos.\alpha' + y\cos.\zeta' + z\cos.\gamma')) = m : m'$, de laquelle on tire l'équation

$x(m'\cos.\alpha - m\cos.\alpha') + y(m'\cos.\zeta - m\cos.\zeta') + z(m'\cos.\gamma - m\cos.\gamma') = m'd - md'$.

Cette équation est celle d'une surface plane. Pour la ramener à l'équation fondamentale du plan; soit

$(m'\cos.\alpha - m\cos.\alpha')^2 + (m'\cos.\zeta - m\cos.\zeta')^2 + (m'\cos.\gamma - m\cos.\gamma')^2 = \mu\mu$; on a l'équation

$$x\times\frac{m'\cos.\alpha - m\cos.\alpha'}{\mu} + y\times\frac{m'\cos.\zeta - m\cos.\zeta'}{\mu} + z\times\frac{m'\cos.\gamma - m\cos.\gamma'}{\mu} = \frac{m'd - md'}{\mu}.$$

Partant, les cosinus des angles que la perpendiculaire au plan cherché fait avec les axes des x, des y et des z, sont respectivement $\frac{m'\cos.\alpha - m\cos.\alpha'}{\mu}$, $\frac{m'\cos.\zeta - m\cos.\zeta'}{\mu}$, $\frac{m'\cos.\gamma - m\cos.\gamma'}{\mu}$; et la perpendiculaire abaissée sur ce plan depuis l'origine est $\frac{m'd - md'}{\mu}$.

Item, $\mu\mu = mm - 2mm'(\cos.\alpha\cos.\alpha' + \cos.\zeta\cos.\zeta' + \cos.\gamma\cos.\gamma') + m'm'$. Or, $\cos.\alpha\cos.\alpha' + \cos.\zeta\cos.\zeta' + \cos.\gamma\cos.\gamma'$ est (§ 102) le cosinus de l'angle que font entr'elles les perpendiculaires aux deux plans, ou celui de l'angle des deux plans; soit appelé cet angle ϕ; $\mu\mu = mm - 2mm'\cos.\phi + m'm'$.

Qu'un des axes, tel que celui des x, soit la commune section des deux

Digitized by Google

plans. Dans cette supposition, $\begin{matrix} d=o \\ d'=o \end{matrix}$; $\begin{matrix} \alpha=1\,Dr & \cos.\alpha=o \\ \alpha'=1\,Dr & \cos.\alpha'=o \end{matrix}$. L'équation devient $y\times\frac{m'\cos.\mathcal{C}-m\cos.\mathcal{C}'}{\mu}+z\times\frac{m'\cos.\gamma-m\cos.\gamma'}{\mu}=o$. Partant, le rapport de y à z est constant pour toutes les valeurs de x; et les points Y sont à un plan passant par la commune section des deux plans donnés de position.

§ 119.

Problème. Soient des plans donnés de position déterminés par leurs équations; et soient des droites correspondantes données de grandeur. D'un même point soient abaissées sur ces plans des perpendiculaires; et soient pris les rectangles de ces perpendiculaires par les droites correspondantes données de grandeur. Que la somme de ces rectangles soit égale à un espace S donné de grandeur. On demande le lieu des points depuis lesquels ces perpendiculaires sont abaissées.

Que les équations des plans donnés soient

$x\cos.\alpha+y\cos.\mathcal{C}+z\cos.\gamma=d$
$x\cos.\alpha'+y\cos.\mathcal{C}'+z\cos.\gamma'=d'$
$x\cos.\alpha''+y\cos.\mathcal{C}''+z\cos.\gamma''=d''$

$x\cos.\alpha^{x-1}+y\cos.\mathcal{C}^{x-1}+z\cos.\gamma^{x-1}=d^{x-1}$

$x\cos.\alpha^{x}+y\cos.\mathcal{C}^{x}+z\cos.\gamma^{x}=d^{x}$. Soient $m, m', m''\ldots. m^{x-1}, m^{x-1}, m^{x}$, les droites données de grandeur correspondantes à ces plans. Soient x, y, z les coordonnées d'un des points dont le lieu est cherché.

En supposant que l'origine est entre les plans proposés, et les plans qui leur sont respectivement parallèles et qui sont menés par le point xyz; les perpendiculaires abaissées du point xyz sur les plans donnés sont respectivement

$x\cos.\alpha+y\cos.\mathcal{C}+z\cos.\gamma+d$
$x\cos.\alpha'+y\cos.\mathcal{C}'+z\cos.\gamma'+d'$
$x\cos.\alpha''+y\cos.\mathcal{C}''+z\cos.\gamma''+d''$

$x\cos.\alpha^{x-1}+y\cos.\mathcal{C}^{x-1}+z\cos.\gamma_{x-1}+d_{x-1}$

$x\cos.\alpha^{x}+y\cos.\mathcal{C}^{x}+z\cos.\gamma^{x}+d^{x}$. Partant, on doit avoir l'équation $x\int. m^{x}\cos.\alpha^{x}+y\int. m^{x}\cos.\mathcal{C}^{x}+z\int. m^{x}\cos.\gamma^{x}+\int. m^{x}d^{x}=S$. Cette équation est celle d'une surface plane. Pour la ramener à l'équation fondamentale du plan, soit fait $\int.^{2} m^{x}\cos.\alpha^{x}+\int.^{2} m^{x}\cos.\mathcal{C}^{x}+\int.^{2} m^{x}\cos.\gamma^{x}=\mu\mu$. On a $x\times\frac{\int. m^{x}\cos.\alpha^{x}}{\mu}+y\times\frac{\int. m^{x}\cos.\mathcal{C}^{x}}{\mu}+z\times\frac{\int. m^{x}\cos.\gamma^{x}}{\mu}=\frac{S-\int. m^{x}d^{x}}{\mu}$. Partant,

la perpendiculaire au plan qui est le lieu des points cherchés fait avec les axes des x, des y et des z des angles dont les cosinus sont

$\frac{f.\,m^x \cos.\,\alpha^x}{\mu}$, $\frac{f.\,m^x \cos.\,\epsilon^x}{\mu}$, $\frac{f.\,m^x \cos.\,\gamma^x}{\mu}$; et la perpendiculaire abaissée de l'origine sur ce plan est $\frac{S-f.\,m^x\,d^x}{\mu}$.

Il n'est pas difficile de montrer l'accord de ce résultat du calcul algébrique, avec celui de l'analyse géométrique développé dans les §§ 89 et 90; et d'en tirer les cas indéterminés.

Je passe à l'application des principes de l'analyse algébrique, à la recherche de quelques lieux à la surface sphérique.

§ 120.

Soient deux points donnés de position par leurs coordonnées, et soit un rapport donné différent du rapport d'égalité. On demande le lieu des points de chacun desquels menant des droites aux deux points donnés leur rapport soit donné.

Soient a, b, c; a', b', c', les coordonnés des points donnés. Soit le rapport donné celui de m à m'.

Soient x, y, z, les coordonnées d'un des points dont le lieu est cherché. Les carrés des distances de ce point aux deux points donnés sont $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2$ et $(x-a')^2+(y-b')^2+(z-c')^2$. On a donc la proportion $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 : (x-a')^2+(y-b')^2+(z-c')^2 = mm : m'm'$; de laquelle on tire l'équation $(x-\frac{m'm'a-mma'}{m'm'-mm})^2+(y-\frac{m'm'b-mmb'}{m'm'-mm})^2+(z-\frac{m'm'c-mmc'}{m'm'-mm})^2 = \frac{mmm'm'}{(m'm'-mm)^2}((a-a')^2+(b-b')^2+(c-c')^2)$.

Dans cette équation, $(a-a')^2+(b-b')^2+(c-c')^2$ est le carré de la distance des deux points donnés, lequel soit dd. Cette équation est celle d'une surface sphérique dont les coordonnées du centre sont $\frac{m'm'a-mma'}{m'm'-mm}$, $\frac{m'm'b-mmb'}{m'm'-mm}$, $\frac{m'm'c-mmc'}{m'm'-mm}$; et dont le rayon est $\frac{mm'}{m'm'-mm}d$ (Voy. les §§ 87 et 112).

§ 121.

Problème. Soit un point donné de position par ses coordonnées; et soit un plan donné de position par son équation; on demande le lieu des points de chacun

chacun desquels menant des droites, l'une au point donné et l'autre perpendiculaire au plan donné; le carré de la première droite soit égal au rectangle de la seconde par une droite $2l$ donnée de grandeur.

Soient a,b,c, les coordonnées du point donné. Soit $x\cos.\alpha+y\cos.\zeta+z\cos.\gamma=d$ l'équation du plan.

Soient x,y,z, les coordonnées de l'un des points dont le lieu est cherché. Le carré de la distance des points abc et xyz est $(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2$. La perpendiculaire abaissée du point xyz sur le plan donné est $d-(x\cos.\alpha+y\cos.\zeta+z\cos.\gamma)$. On a donc l'équation $(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2=2l(d-(x\cos.\alpha+y\cos.\zeta+z\cos.\gamma))$. De là, on obtient $(x-(a-l\cos.\alpha))^2+(y-(b-l\cos.\zeta))^2+(z-(c-l\cos.\gamma))^2$

$$=2l(d-(a\cos.\alpha+b\cos.\zeta+c\cos.\gamma)+\tfrac{1}{2}l).$$

Or, $d-(a\cos.\alpha+b\cos.\zeta+c\cos.\gamma)$ est la perpendiculaire abaissée du point a,b,c, sur le plan donné, soit cette perpendiculaire D. L'équation obtenue est celle d'une surface sphérique, pour laquelle les coordonnées du centre sont $a-l\cos.\alpha$, $b-l\cos.\zeta$, $c-l\cos.\gamma$, et dont le carré du rayon est $2l(\frac{1}{2}l+D)$.

Lorsque D change de signe, c'est-à-dire lorsque les points abc et xyz sont des deux côtés opposés du plan donné; le problème est susceptible de limite, et la plus grande valeur de D est $\frac{1}{2}l$.

Que l'axe des x soit la perpendiculaire au plan donné abaissée depuis le point donné abc; $\cos.\alpha=1$, $\cos.\zeta=0$, $\cos.\gamma=0$ $b=0$, $c=0$. L'équation devient $(x-(a-l))^2+yy+zz=2l(\frac{1}{2}l+D)$. Partant, le centre est sur le même axe, et les coordonnées du centre sont $a-l$, o, o.

§ 122.

Problème. Soient des points en nombre quelconque donnés de position dans l'espace par leurs coordonnées. Soient des exposans correspondans de rapports donnés de grandeur. On demande le lieu des points de chacun desquels menant des droites aux points donnés, la somme des espaces qui ont aux carrés de ces droites les rapports donnés, soit donnée de grandeur.

Soient $a, b, c;\ a', b', c';\ a'', b'', c'';\ldots a^x, b^x, c^x;$ les coordonnées des points donnés. Soient m, m', $m''\ldots m^x$, les exposans donnés des rapports correspondans. Soit S la somme donnée des espaces proposés. Soient x, y, z, les coordonnées d'un des points dont le lieu est cherché.

Les carrés des distances de ce dernier point aux points donnés sont

Digitized by Google

respectivement $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2$

$(x-a')^2+(y-b')^2+(z-c')^2$

$(x-a'')^2+(y-b'')^2+(z-c'')^2$

$(x-a^n)^2+(y-b^n)^2+(z-c^n)^2$. On a donc l'équation,

$$(xx+yy+zz)f.\,m^n-2xf.\,m^n a^n-2yf.\,m^n b^n-2zf.\,m^n c^n+f.\,m^n\times a^{n\,2}+f.\,m^n\times b^{n\,2}+f.\,m^n\times c^{n\,2}=S.$$

De là, $$\left(x-\frac{f.\,m^n a^n}{f.\,m^n}\right)^2+\left(y-\frac{f.\,m^n b^n}{f.\,m^n}\right)^2+\left(z-\frac{f.\,m^n c^n}{f.\,m^n}\right)^2$$

$$=\frac{f.^2\,m^n a^n+f.^2\,m^n b^n+f.\,m^n c^n}{f.^2\,m^n}-\frac{f.\,m^n\times a^{n\,2}+f.\,m^n\times b^{n\,2}+f.\,m^n\times c^{n\,2}-S}{f.\,m^n}.$$

Le lieu de cette équation (s'il est possible) est une surface sphérique ; les coordonnées de son centre sont $\frac{f.\,m^n a^n}{f.\,m^n}$, $\frac{f.\,m^n b^n}{f.\,m^n}$, $\frac{f.\,m^n c^n}{f.\,m^n}$; et le carré de son rayon est le second membre de cette équation. Or, $\frac{f.\,m^n a^n}{f.\,m^n}$, $\frac{f.\,m^n b^n}{f.\,m^n}$, $\frac{f.\,m^n c^n}{f.\,m^n}$ sont les coordonnées du centre des moyennes distances des points donnés pour les coefficiens donnés. Donc, le carré des moyennes distances des points donnés pour les coefficiens donnés est le centre de la surface sphérique qui est le lieu cherché (s'il est possible).

§ 123.

Soient des plans qui se coupent en un même point donnés de position par leurs équations. D'un même point soient abaissées sur ces plans des perpendiculaires ; que la somme des carrés de ces perpendiculaires soit constante. On demande dans quel cas le lieu de ce point est une surface sphérique.

Que le point de section de ces plans soit pris pour l'origine des coordonnées. Les équations des plans donnés sont

$$x\cos.\alpha+y\cos.\zeta+z\cos.\gamma=0$$
$$x\cos.\alpha'+y\cos.\zeta'+z\cos.\gamma'=0$$
$$x\cos.\alpha''+y\cos.\zeta''+z\cos.\gamma''=0.$$

$$x\cos.\alpha^n+y\cos.\zeta^n+z\cos.\gamma^n=0.$$

Soient x, y, z, les coordonnées du point dont le lieu est demandé. Les perpendiculaires abaissées de ce point sur les plans donnés sont

$x \cos. \alpha + y \cos. \mathfrak{C} + z \cos. \gamma$

$x \cos. \alpha' + y \cos. \mathfrak{C}' + z \cos. \gamma'$

$x \cos. \alpha'' + y \cos. \mathfrak{C}'' + z \cos. \gamma''$

$x \cos. \alpha^N + y \cos. \mathfrak{C}^N + z \cos. \gamma^N$

La somme S des carrés de ces perpendiculaires est

$$\begin{aligned} &xx\, f. \cos.^2 \alpha^N \\ &+ 2xy\, f. \cos. \alpha^N \cos. \mathfrak{C}^N. \\ &+ 2xz\, f. \cos. \alpha^N \cos. \gamma^N \\ &+ yy\, f. \cos.^2 \mathfrak{C}^N \\ &+ 2yz\, f. \cos. \mathfrak{C}^N \cos. \gamma^N \\ &+ zz\, f. \cos.^2 \gamma^N \end{aligned}$$

Pour que l'équation qui en résulte soit celle d'une surface sphérique, on doit avoir les cinq équations de condition.

$$f. \cos. \alpha^N \cos. \mathfrak{C}^N = 0$$
$$f. \cos. \alpha^N \cos. \gamma^N = 0$$
$$f. \cos. \mathfrak{C}^N \cos. \gamma^N = 0$$
$f. \cos.^2 \alpha^N = f. \cos.^2 \mathfrak{C}^N = f. \cos.^2 \gamma^N$. Alors l'équation devient

$$(xx + yy + zz) f. \cos.^2 \alpha^N = S; \text{ ou } xx + yy + zz = \frac{S}{f. \cos.^2 \alpha^N}$$

Le procédé est très-sensiblement le même, lorsqu'à la somme des carrés des perpendiculaires, on substitue des espaces qui ont à ces carrés des rapports dont les exposans sont m, m', m''.... m^N, respectivement. On a de même les équations de condition relatives au lieu à la surface sphérique.

$$f. m^N \cos. \alpha^N \cos. \mathfrak{C}^N = 0$$
$$f. m^N \cos. \alpha^N \cos. \gamma^N = 0$$
$$f. m^N \cos. \mathfrak{C}^N \cos. \gamma^N = 0$$
$f. m^N \cos.^2 \alpha^N = f. m^N \cos.^2 \mathfrak{C}^N = f. m^N \cos.^2 \gamma^N$.

§ 124.

Problème. Soient des plans donnés de position dans l'espace par leurs équations. D'un même point soient abaissées sur ces plans des perpendiculaires. Soit prise la somme des carrés de ces perpendiculaires ; et que cette somme soit égale à un espace donné de grandeur. On demande les cas dans lesquels le lieu de ce point est une surface sphérique.

Que les équations des plans donnés soient $x\cos.\alpha + y\cos.\mathfrak{C} + z\cos.\gamma = d$

$x\cos.\alpha' + y\cos.\mathfrak{C}' + z\cos.\gamma' = d'$

$x\cos.\alpha'' + y\cos.\mathfrak{C}'' + z\cos.\gamma'' = d''$

$x\cos.\alpha^N + y\cos.\mathfrak{C}^N + z\cos.\gamma^N = d^N$

Que les coordonnées du point dont le lieu est proposé soient x, y, z. Les perpendiculaires abaissées de ce point sur les plans donnés sont

$x\cos.\alpha + y\cos.\mathfrak{C} + z\cos.\gamma - d$

$x\cos.\alpha' + y\cos.\mathfrak{C}' + z\cos.\gamma' - d'$

$x\cos.\alpha'' + y\cos.\mathfrak{C}'' + z\cos.\gamma'' - d''$

$x\cos.\alpha^N + y\cos.\mathfrak{C}^N + z\cos.\gamma^N - d^N.$

La somme des carrés de ces perpendiculaires est

$$\begin{aligned} &xx\,f.\cos.^2\alpha^N \\ &+ 2xy\,f.\cos.\alpha^N\cos.\mathfrak{C}^N \\ &+ 2xz\,f.\cos.\alpha^N\cos.\gamma^N \\ &+ yy\,f.\cos.^2\mathfrak{C}^N \\ &+ 2yz\,f.\cos.\mathfrak{C}^N\cos.\gamma^N \\ &+ zz\,f.\cos.^2\gamma^N \end{aligned} \quad \begin{aligned} &- 2x\,f.\,d^N\cos.\alpha^N \\ &- 2y\,f.\,d^N\cos.\mathfrak{C}^N \\ &- 2z\,f.\,d^N\cos.\gamma^N. \end{aligned} \quad + f.\,d^{N2}$$

Pour que l'équation qui en résulte soit à la surface d'une sphère, dont l'équation est $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = rr$; on doit avoir les mêmes équations de condition que pour le cas précédent dans lequel les plans donnés se coupent en un même point. Le résultat est le même, lorsque à la somme des carrés des perpendiculaires on substitue la somme des espaces qui ont à ces carrés des rapports dont les exposans sont donnés. On obtient donc ce théorème. Soient des plans en nombre quelconque donnés de position (non parallèles entr'eux et qui ne se coupent pas dans une même droite). D'un même point soient menés des plans respectivement parallèles aux premiers. De tout autre point soient abaissées sur tous ces plans des perpendiculaires. Que le lieu de ce dernier point répondant à une valeur constante de la somme des carrés des perpendiculaires abaissées sur les seconds plans, ou à la somme constante des espaces qui ont à ces carrés des rapports donnés, soit une surface sphérique. Il en est de même lorsque les mêmes conditions sont relatives aux perpendiculaires abaissées sur les premiers plans.

En particulier ; que les plans proposés soient les faces d'un polyhèdre régulier,

et

et que la question soit relative à la somme simple des carrés des perpendiculaires abaissées sur ces plans, on peut démontrer que les équations de condition sont remplies dans ce cas, et par conséquent le lieu proposé est une surface sphérique.

L'équation devient $f.\cos.^2\alpha^N(xx+yy+zz) - 2xf.\,d^N\cos.\alpha^N - 2yf.\,d^N\cos.\zeta^N + f.\,d^{N2} = S. - 2zf.\,d^N\cos.\gamma^N$

De là, $\left(x-\frac{f.\,d^N\cos.\alpha^N}{f.\cos.^2\alpha^N}\right)^2+\left(y-\frac{f.\,d^N\cos.\zeta^N}{f.\cos.^2\alpha^N}\right)^2+\left(z-\frac{f.\,d^N\cos.\gamma^N}{f.\cos.^2\alpha^N}\right)^2$

$$=\frac{S.-f.\,d^{N2}}{f.\cos.^2\alpha^N}+\frac{f.^2\,d^N\cos.\alpha^N+f.^2\,d^N\cos.\zeta^N+f.^2\,d^N\cos.\gamma^N}{f.^2\cos.^2\alpha^N}$$

Les coordonnées du centre de la sphère sont

$\frac{f.\,d^N\cos.\alpha^N}{f.\cos.^2\alpha^N}$, $\frac{f.\,d^N\cos.\zeta^N}{f.\cos.^2\zeta^N}$, $\frac{f.\,d^N\cos.\gamma^N}{f.\cos.^2\gamma^N}$; et le carré du rayon de la sphère est

$$\frac{S-f.\,d^{N2}}{f.\cos.^2\alpha^N}+\frac{f.^2\,d^N\cos.\alpha^N+f.^2\,d^N\cos.\zeta^N+f.^2\,d^N\cos.\gamma^N}{f.^2\cos.^2\alpha^N}.$$

Soient a', b', c', les coordonnées du centre z des moyennes distances des pieds des perpendiculaires $d, d', d'', d'''\ldots. d^N$ abaissées sur les plans depuis l'origine; on a les équations $na' = f.\,d^N\cos.\alpha^N$

$nb' = f.\,d^N\cos.\zeta^N$

$nc' = f.\,d^N\cos.\gamma^N$.

Partant; les coordonnées du centre de la sphère sont entr'elles comme les coordonnées du centre des moyennes distances des pieds des perpendiculaires abaissées depuis l'origine sur les faces du polyhèdre proposé.

Soit D la distance du centre z à l'origine; $DD = a'a' + b'b' + c'c'$

$$=\frac{f.^2d^N\cos.\alpha^N+f.^2d^N\cos.\zeta^N+f.^2d^N\cos.\gamma^N}{nn};$$

Le carré du rayon de la sphère, est $\frac{S-f.d^{N2}}{f.\cos.^2\alpha^N}+\frac{nn\,DD}{f.^2\cos.^2\alpha^N}$.

§. 125.

Problème. Soit un tétrahèdre dont les faces sont déterminées par leurs équations. D'un même point soient abaissées sur ces faces des perpendiculaires. Que le rectangle des perpendiculaires abaissées sur deux de ces faces ait un rapport donné au rectangle des perpendiculaires abaissées sur les deux autres

faces. On demande dans quel cas le lieu des points depuis lesquels les perpendiculaires sont abaissées est une surface sphérique.

Que les équations des faces du tétrahèdre soient

$$x\cos.\alpha + y\cos.\mathfrak{C} + z\cos.\gamma = d$$
$$x\cos.\alpha' + y\cos.\mathfrak{C}' + z\cos.\gamma' = d'$$
$$x\cos.\alpha'' + y\cos.\mathfrak{C}'' + z\cos.\gamma'' = d''$$
$$x\cos.\alpha''' + y\cos.\mathfrak{C}''' + z\cos.\gamma''' = d'''$$

Que le rapport donné des deux rectangles soit celui de p à p'.

Soient x, y, z, les coordonnéess d'un des points dont le lieu est proposé.

Les perpendiculaires abaissées du point xyz sur les faces du tétrahèdre sont

$$x\cos.\alpha + y\cos.\mathfrak{C} + z\cos.\gamma - d$$
$$x\cos.\alpha' + y\cos.\mathfrak{C}' + z\cos.\gamma' - d'$$
$$x\cos.\alpha'' + y\cos.\mathfrak{C}'' + z\cos.\gamma'' - d''$$
$$x\cos.\alpha''' + y\cos.\mathfrak{C}''' + z\cos.\gamma''' - d'''$$

Les rectangles proposés sont

$$xx\cos.\alpha\cos.\alpha'' + xy(\cos.\alpha\cos.\mathfrak{C}'' + \cos.\alpha''\cos.\mathfrak{C}) + xz(\cos.\alpha\cos.\gamma'' + \cos.\alpha''\cos.\gamma) - x(d''\cos.\alpha + d\cos.\alpha'') + yy\cos.\mathfrak{C}\cos.\mathfrak{C}'' + yz(\cos.\mathfrak{C}\cos.\gamma'' + \cos.\mathfrak{C}''\cos.\gamma) - y(d''\cos.\mathfrak{C} + d\cos.\mathfrak{C}'') + zz\cos.\gamma\cos.\gamma'' - z(d''\cos.\gamma + d\cos.\gamma'') + dd''$$

$$xx\cos.\alpha'\cos.\alpha''' + xy(\cos.\alpha'\cos.\mathfrak{C}''' + \cos.\alpha'''\cos.\mathfrak{C}') + xz(\cos.\alpha'\cos.\gamma''' + \cos.\alpha'''\cos.\gamma') - x(d'''\cos.\alpha' + d'\cos.\alpha''') + yy\cos.\mathfrak{C}'\cos.\mathfrak{C}''' + yz(\cos.\mathfrak{C}'\cos.\gamma''' + \cos.\mathfrak{C}'''\cos.\gamma') - y(d'''\cos.\mathfrak{C}' + d'\cos.\mathfrak{C}''') + zz\cos.\gamma'\cos.\gamma''' - z(d'''\cos.\gamma' + d'\cos.\gamma''') + d'd'''$$

On a l'équation;

$$xx\left(\frac{\cos.\alpha\cos.\alpha''}{p} - \frac{\cos.\alpha'\cos.\alpha'''}{p'}\right) + xy\left(\frac{\cos.\alpha\cos.\mathfrak{C}'' + \cos.\alpha''\cos.\mathfrak{C}}{p} - \frac{\cos.\alpha'\cos.\mathfrak{C}''' + \cos.\alpha'''\cos.\mathfrak{C}'}{p'}\right) + xz\left(\frac{\cos.\alpha\cos.\gamma'' + \cos.\alpha''\cos.\gamma}{p} - \frac{\cos.\alpha'\cos.\gamma''' + \cos.\alpha'''\cos.\gamma'}{p'}\right) - x\left(\frac{d''\cos.\alpha + d\cos.\alpha''}{p} - \frac{d'\cos.\alpha''' + d'''\cos.\alpha'}{p'}\right) + yy\left(\frac{\cos.\mathfrak{C}\cos.\mathfrak{C}''}{p} - \frac{\cos.\mathfrak{C}'\cos.\mathfrak{C}'''}{p'}\right).$$

Digitized by Google

$$+yz\left(\frac{\cos.\mathcal{C}\cos.\gamma''+\cos.\mathcal{C}''\cos.\gamma}{p}-\frac{\cos.\mathcal{C}'\cos.\gamma'''+\cos.\mathcal{C}'''\cos.\gamma'}{p'}\right)$$
$$-y\left(\frac{d''\cos.\mathcal{C}+d\cos.\mathcal{C}''}{p}-\frac{d'\cos.\mathcal{C}'''+d'''\cos.\mathcal{C}'}{p'}\right)$$
$$+zz\left(\frac{\cos.\gamma\cos.\gamma''}{p}-\frac{\cos.\gamma'\cos.\gamma'''}{p'}\right)$$
$$-z\left(\frac{d''\cos.\gamma+d\cos.\gamma''}{p}-\frac{d'\cos.\gamma'''+d'''\cos.\gamma'}{p'}\right)$$
$$+\frac{dd''}{p}-\frac{d'd'''}{p'}. \qquad =0.$$

Pour que cette équation soit celle d'une surface sphérique, les coefficiens des termes xx, yy, zz, doivent être égaux entr'eux; et les termes xy, xz, xy, doivent évanouir; ce qui donne lieu à cinq équations de conditions, indépendantes des quatre conditions de la forme $\cos.^2\alpha+\cos.^2\mathcal{C}+\cos.^2\gamma=1$.

CHAPITRE CINQUIÈME.

Application des lieux géométriques à la solution de quelques problèmes élémentaires déterminés.

§ 126.

L'APPLICATION des lieux géométriques aux problèmes élémentaires déterminés se présente dès le début des élémens de la géométrie. Je vais justifier cette assertion par un petit nombre d'exemples choisis parmi les plus simples.

Premier exemple. Sur une droite donnée comme base, décrire un triangle dont les deux autres côtés sont donnés de grandeur.

Soient décrits les lieux des points dont les distances à chacune des extrémités de la base sont respectivement égales aux côtés donnés; l'intersection de ces deux lieux est le sommet cherché du triangle demandé.

Algébriquement. Soient a et b les coordonnées d'une des extrémités de la base; soient a' et b' les coordonnées de l'autre extrémité. Soient d et d' les deux côtés donnés de grandeur, et soient x et y les coordonnées du sommet cherché. On a les deux équations $\begin{matrix}(x-a)^2+(y-b)^2=dd\\(x-a')^2+(y-b')^2=d'd'\end{matrix}$; pour déterminer les valeurs de x et de y, et partant, pour déterminer la position du sommet.

Ces équations se simplifient par des suppositions particulières sur la position des axes des coordonnées. Que l'axe des x soit sur la base donnée; $b=o$, $b'=o$;

partant, $\begin{matrix}(x-a)^2+yy=dd\\(x-a')^2+yy=d'd'\end{matrix}$; de là, $x=\frac{d'+d}{2}\times\frac{d'-d}{a-a'}+\frac{a+a'}{2}$.

$$x-a=\frac{d'+d}{2}\times\frac{d'-d}{a-a'}-\frac{a-a'}{2}.$$

$$yy=\frac{(d'+d-a+a')\,(d'-d+a-a')\,(d'+d+a-a')\,(-d'+d+a-a')}{4\,(a-a')^2}.$$

Que l'origine soit une des extrémités $a'b'$ de la base; $a'=o$, la base est a; $yy=\frac{(d'+d-a)\,(d'-d+a)\,(d'+d+a)\,(-d'+d+a)}{4\,aa}$; la surface du triangle est $\sqrt{\left(\frac{a+d+d'}{2}\times\frac{a+d-d'}{2}\times\frac{a-d+d'}{2}\times\frac{-a+d+d'}{2}\right)}$; ainsi qu'il est connu.

Second exemple. Partager une droite donnée en deux parties égales.

Soient cherchés deux des points également éloignés des extrémités de la droite donnée. Le point de section de ce lieu et de la droite donnée est le milieu cherché de cette dernière.

Algébriquement. Soient a et b, a' et b', les coordonnées des extrémités de la droite donnée. Soient x et y les cordonnées du point de section cherché. Le carré de la droite donnée de grandeur est $(a-a')^2+(b-b')^2$; le carré de sa moitié ou de la distance du milieu cherché aux deux extrémités est $\frac{(a-a')^2+(b-b')^2}{4}$.

On a les deux équations $(a-x)^2+(b-y)^2=\frac{(a-a')^2+(b-b')^2}{4}$

$$(a'-x)^2+(b'-y)^2=\frac{(a-a')^2+(b-b')^2}{4}$$

Soit la droite donnée prise pour axe des coordonnées

$b=o$, $b'=o$; $(a-x)^2+yy=\frac{(a-a')^2}{4}$

$$(a'-x)^2+yy=\frac{(a-a')^2}{4}$$

$$(a+a'-2x)\,(a-a')=o;\ x=\frac{a+a'}{2}.$$

$$a-x=\frac{a-a'}{2};\ y=o.$$

Troisième exemple. D'un point donné sur une droite, élever une perpendiculaire à cette droite.

Comme

Comme la perpendiculaire à une droite élevée depuis son milieu a chacun de ses points également éloigné des extrémités de cette droite, et qu'une ligne droite est déterminée par deux points : on prend sur la droite donnée de position deux points également éloignés du point donné, on cherche hors de cette ligne quelqu'autre point également éloigné de ces deux-là, et on joint ce dernier point avec le point donné par une ligne droite qui est la perpendiculaire demandée.

Le procédé par lequel on abaisse une perpendiculaire sur une droite depuis un point donné hors de cette droite est fondé sur le même principe.

Quatrième exemple. On demande le centre et le rayon d'un cercle dont la circonférence passe par trois points donnés.

Le centre du cercle cherché doit être également éloigné de chacun des trois points donnés ; partant, il est à l'intersection des lieux des points également éloignés des points donnés pris deux à deux. Or, ces lieux sont les perpendiculaires aux droites qui joignent les points donnés et élevées depuis leurs milieux ; donc, ce centre est déterminé.

Algébriquement. Soient a et b, a' et b', a'' et b'', les coordonnées des points donnés ; soit r le rayon du cercle cherché, et soient x et y les coordonnées du centre ; on a les trois équations,

$$(x-a)^2+(y-b)^2=rr.$$
$$(x-a')^2+(y-b')^2=rr.$$
$$(x-a'')^2+(y-b'')^2=rr.$$

Au moyen de ces trois équations les coordonnées x et y sont exprimées par des formules du premier degré seulement ; et le rayon r se trouve par une extraction de racine carrée.

Remarque. Le point dont les distances à trois points donnés sont entr'elles dans des rapports donnés (différens du rapport d'égalité) peut aussi se déterminer par les intersections des circonférences qui sont les lieux des points, dont les rapports des distances aux points donnés pris deux à deux sont égaux aux rapports donnés.

Que les rapports donnés soient ceux de m à m' et m''. Les quantités $(x-a)^2+(y-b)^2$, $(x-a')^2+(y-b')^2$, $(x-a'')^2+(y-b'')^2$, doivent être entr'elles comme les quantités données mm, m'm', m''m''.

Cinquième exemple. On demande le centre et le rayon d'un cercle dont la circonférence touche les trois côtés d'un triangle donné.

Le centre du cercle cherché doit être également éloigné de chacun des côtés du triangle donné ; partant, il doit être également éloigné de ces côtés

pris deux à deux. Mais les points également éloignés de deux de ces côtés sont sur la droite qui coupe en deux parties égales l'angle formé par ces côtés ; donc, le centre cherché est sur chacune de ces droites, et partant, il est à leur point de section.

Algébriquement. Soient $x \cos. \alpha + y \sin. \alpha = d$

$x \cos. \alpha' + y \sin. \alpha' = d'$

$x \cos. \alpha'' + y \sin. \alpha'' = d''$

les équations des trois côtés du triangle. Soient x et y les coordonnées du centre du cercle cherché, et soit r son rayon.

Les perpendiculaires abaissées du centre du cercle sur les côtés du triangle, sont respectivement

$d - (x \cos. \alpha + y \sin. \alpha)$

$d' - (x \cos. \alpha' + y \sin. \alpha')$

$d'' - (x \cos. \alpha'' + y \sin. \alpha'')$.

On a donc les trois équations

$d - (x \cos. \alpha + y \sin. \alpha) = r$

$d' - (x \cos. \alpha' + y \sin. \alpha') = r$

$d'' - (x \cos. \alpha'' + y \sin. \alpha'') = r$; au moyen desquelles on détermine les trois inconnues x, y, r.

Remarque 1.re Le problème proposé énoncé généralement est susceptible de quatre solutions. En effet, le cercle cherché est *inscrit* au triangle, lorsqu'il touche les trois côtés intérieurement au triangle ; et il est *ex-inscrit* au triangle lorsqu'il touche ses côtés extérieurement au triangle ; en sorte que, il touche un des côtés et les prolongemens des deux autres ; il y a trois cercles qui sont dans ce dernier cas.

Remarque 2.e On détermine sensiblement de la même manière le point dont les rapports des distances à trois droites données de position (qui ne se coupent pas en un même point et qui ne sont pas parallèles entr'elles) sont égaux à des rapports donnés.

En particulier, trois droites (non parallèles entr'elles) étant données de grandeur et de position ; on détermine le sommet commun de trois triangles ayant ces droites pour bases, et dont les surfaces sont entr'elles dans des rapports donnés.

Remarque 3.e Les problèmes précédens sur des points et sur des droites qui sont sur un même plan, ont leurs correspondans sur des points et sur des plans situés dans l'espace.

Ainsi on détermine le point dans l'espace également éloigné de quatre points donnés de position, non situés sur un même plan ; et le point tel que les rapports

Digitized by Google

de ses distances à ces quatre points sont donnés. De même on détermine le point dans l'espace également éloigné des faces d'un tétraèdre, ou le point tel que les rapports de ses distances à ces faces sont donnés.

Sixième exemple. D'un point donné hors d'un cercle lui mener une tangente.

La tangente cherchée doit-être perpendiculaire au rayon mené au point de contact; donc, le point de contact est sur la circonférence du demi-cercle, dont le diamètre est la droite qui joint le point donné avec le centre du cercle donné; mais, ce point est aussi sur la circonférence du cercle donné, donc il est au point de section de ces deux circonférences.

Exercice proposé. Résoudre le même problème, dans la supposition qu'on ne peut rien tracer dans l'intérieur du cercle douné, ou que l'intérieur de ce cercle est inaccessible.

Septième exemple. Sur une droite donnée décrire un segment de cercle capable d'un angle donné.

Le centre du cercle cherché est sur la perpendiculaire à la droite donnée et élevée depuis son milieu. Il est aussi sur la droite menée d'une des extrémités de la droite donnée, et qui fait avec elle un angle égal au complément de l'angle donné; donc, il est à l'intersection de ces deux droites.

Calcul. Soit $2a$ la droite donnée; soit φ l'angle donné. La perpendiculaire abaissée du centre du cercle cherché sur la droite donnée est $a\ cot.\varphi$; et le rayon du cercle cherché est $a\ cosec.\varphi$.

Huitième exemple. Couper une droite donnée $2a$ en deux parties, telles que leur rectangle soit égal à un espace S donné de grandeur.

Puisque le rectangle des deux parties du diamètre d'un cercle est égal au carré de la perpendiculaire élevée du point de section jusqu'à la rencontre de la circonférence : si sur la droite donnée prise pour diamètre on décrit un demi-cercle, le sommet de la perpendiculaire élevée depuis le point de section et dont le carré est égal au rectangle de ces parties, est le point de section de la circonférence et d'une droite donnée de position parallèle au diamètre; partant, ce point est déterminé.

Algébriquement. Que les extrémités de la droite donnée soient ab, $a'b'$, respectivement. Soit xy le point de section cherché.

Les carrés des distances du point xy aux points ab, $a'b'$, sont respectivement $(a-x)^2+(b-y)^2$, $(a'-x)^2+(b'-y)^2$. On a les deux équations.

$$\sqrt{((a-x)^2+(b-y)^2)}\times\sqrt{((a'-x)^2+(b'-y)^2)}=S.$$

$$\sqrt{((a-x)^2+(b-y)^2)}+\sqrt{((a'-x)^2+(b'-y)^2)}=\sqrt{((a-a')^2+(b-b')^2)}.$$

Soient carrés les membres de la seconde équation, et de ces carrés soient

retranchés les quadruples des membres de la première; on obtient en extrayant les racines des restes

$$\sqrt{((a-x)^2+(b-y)^2}-\sqrt{((a'-x)^2+(b'-y)^2}=\sqrt{((a-a')^2+(b-b')^2-4S.)}$$

De là, on détermine chacune des distances du point cherché aux extrémités de la ligne; savoir,

$$\sqrt{((a-x)^2+(b-y)^2}=\frac{\sqrt{((a-a')^2+(b-b')^2}\pm\sqrt{((a-a')^2+(b-b')^2-4S)}}{2}$$

$$\sqrt{((a'-x)^2+(b'-y)^2}=\frac{\sqrt{((a-a')^2+(b-b')^2}\mp\sqrt{((a-a')^2+(b-b')^2-4S)}}{2}.$$

La recherche du problème proposé et les expressions trouvées se simplifient par un choix convenable de l'origine et des axes. En particulier, soit pris pour origine le milieu de la droite donnée, et soit la droite elle-même prise pour l'un des axes tel que celui des x; soit la ligne donnée appelée $2a$; on a $x=\pm\sqrt{(aa-S)}$.

Les exemples de première facilité que je viens de traiter suffisent pour justifier l'assertion, que l'application des lieux géométriques se présente dès le début dans les élémens de la géométrie. Je passe à quelques exemples moins simples, en nuançant (à peu près) leur difficulté.

§ 127.

Problème. Partager deux droites données, l'une et l'autre en deux parties, de manière que le rapport d'une partie de l'une à une partie de l'autre soit donné, et que le rapport des deux autres parties soit aussi donné.

Soient AB, A'B', deux droites données de grandeur. On demande de couper ces droites en X et en X', de manière que les rapports de AX à A'X', et de BX à B'X' soient l'un et l'autre donnés.

Analyse. Par X soit conçue menée Xa égale à A'X', et faisant avec AX un angle quelconque pris pour connu; le rapport de AX à Xa étant donné, le point a est sur une droite Aa donnée de position; que cette droite Aa rencontre en D une parallèle à Xa menée par B; soit DE égale à A'B', et par E soit menée à AD une parallèle qui rencontre en b la droite aX, et qui rencontre AB en C; ab=DE=A'B'; mais aX=A'X'; donc, bX=B'X'; donc le rapport de BX à bX est connu; mais le rapport de bX à CX est aussi connu (=BD:AB); donc, le rapport de BX à CX est aussi connu; mais la droite BC est donnée de grandeur; donc, le point X est connu.

Construction. Soit converti le rapport donné de AX à A'X' dans le rapport de AB à une droite BD, laquelle soit menée du point B faisant avec AB un angle

angle quelconque. Sur DB soit prise depuis le point D une droite DE égale à A'B'; par E soit menée à AD une parallèle qui rencontre AB en C. Soit aussi le rapport donné de BX à B'X' égal au rapport de AB à une droite L; puis soit déterminé le point X de manière que le rapport de BX à CX soit égal au rapport de BD à L; par X soit menée à BD une parallèle qui rencontre CE en b, et AD en a. Les droites AX, aX, BX, bx, sont les droites demandées.

Démonstration. Elle découle de l'analyse.

Remarque. Pour que le problème soit déterminé, les points B et C ne doivent pas coïncider; ou, ce qui revient au même, la droite BD ne doit pas être égale à la droite A'B'. Lorsque le rapport de AX à A'X' est donné égal au rapport de AB à A'B', le rapport de BX à B'X' est déterminé à être égal au même rapport, et la question est indéterminée.

Remarque 2.° Lorsque le point X est entre A et B, le point X' est aussi entre A' et B', et le problème est résolu dans le sens propre de l'énoncé: Lorsque le point X répond à l'une des positions ABX, XAB, le point X' revêt les positions correspondantes A'B'X', X'A'B', et l'on résout une question relative à deux différences.

Remarque 3.° Lorsque les positions demandées sont AXB, X'A'B' ou A'B'X'; le problème proposé est toujours déterminé.

Première application. Partager trois droites données chacune en deux parties; de manière que les rapports d'une partie de la première à une partie de la seconde, de l'autre partie de la seconde à une partie de la troisième, et de l'autre partie de la troisième à la partie restante de la première, soient égaux à des rapports donnés.

Soient AB, A'B', A''B'', à couper dans les points X, X', X'', de manière que les rapports de AX à B'X', de A'X' à B''X'' et de A''X'' à BX soient égaux à des rapports donnés.

Soit le rapport donné de AX à B'X' égal au rapport de AB à B'b'; donc aussi

$$BX : b'X' = AB : B'b'$$

Soit $A''X'' : BX = L : AB$

$$A''X'' : b'X' = L : B'b'.$$

Partant, on connoît les rapports de A''X'' à b'X' et de B''X'' à A'X'; donc, la question proposée sur trois droites, est ramenée à une question sur deux droites; et comme les positions des points sont A'b'X' et A''X''B'', le problème est toujours déterminé.

On peut ramener à ce cas le problème suivant. A un triangle donné inscrire un triangle dont les côtés sont respectivement parallèles à des droites données.

Le cas qui me paroît le plus remarquable est celui dans lequel les côtés du triangle cherché sont également inclinés aux côtés du triangle donné qui leur sont adjacens, dans lequel cas le triangle inscrit a le contour le plus petit. Voyez mon ouvrage intitulé *De relatione mutua capacitatis et Terminorum Figurarum.*

Seconde application. Partager quatre droites données chacune en deux parties, de manière que le rapport d'une partie de la première à une partie de la seconde, celui de l'autre partie de la seconde à une partie de la troisième, celui de l'autre partie de la troisième à une partie de la quatrième, et celui des parties restantes de la quatrième et de la première, soient respectivement égaux à des rapports donnés.

Soient AB, A′B′, A″B″, A‴B‴, des droites données de grandeur. On demande de les couper en X, X′, X″, X‴, de manière que chacun des rapports AX : B′X′, A′X′ : B″X″, A″X″ : B‴X‴, A‴X‴ : BX ; respectivement, soient égaux à des rapports donnés.

Soit AX : B′X′ = AB : B′b′ ;
Donc, BX : b′X′ = AB : B′b′
Soit A‴X‴ : BX = L : AB
A‴X‴ : b′X′ = L : B′b′. Soit L : B′b′ = A‴B‴ : b′c′ ;
A‴X‴ : b′X′ = A‴B‴ : b′c′
B‴X‴ : c′X′ = A‴B‴ : b′c′
Soit A″X″ : B‴X‴ = M : A‴B‴
A″X″ : c′X′ = M : b′c′ ;

partant, la question proposée sur quatre droites est réduite à la question correspondante sur deux droites ; et comme l'ordre des points donnés et des points cherchés devient A′X′c′, A″X″B″, la question donne lieu à un cas indéterminé.

On peut aisément ramener à cette application la question suivante. A un quadrilatère donné inscrire un quadrilatère dont les côtés sont respectivement parallèles à des droites données de position. Ce problème est susceptible d'un cas indéterminé. Le cas qui me paroît le plus remarquable est celui dans lequel les côtés du quadrilatère inscrit sont deux à deux également inclinés au côté du quadrilatère donné auquel ils sont adjacens ; dans lequel cas, le quadrilatère inscrit a le contour le plus petit. Si on a pu inscrire à un quadrilatère donné un quadrilatère du contour le plus petit, le nombre des quadrilatères inscrits qui jouissent de la même propriété, est illimité. Voyez mon ouvrage déjà cité.

Ces applications peuvent s'étendre à des droites en nombre quelconque ;

Digitized by Google

la question relative à des droites en nombre impair est toujours déterminée, et la question relative à des droites en nombre pair peut donner lieu à un cas indéterminé. En particulier, une figure rectiligne d'un nombre impair de côtés étant proposée, on peut lui inscrire une seule figure de même nom du contour le plus petit : et une figure rectiligne d'un nombre pair de côtés étant proposée; si on peut lui inscrire une figure du même nom du contour le plus petit, on peut lui inscrire un nombre illimité de figures qui jouissent de la même propriété; ces figures sont équiangles entr'elles, mais elles ne sont pas semblables. Cette possibilité a lieu en particulier pour les figures régulières.

§ 128.

Comme quelques-uns des problèmes résolus dans le § précédent ont donné lieu à des cas indéterminés, je crois devoir saisir cette occasion d'éclaircir le sentiment du D^r. PLAYFAIR sur les porismes dont j'ai déjà parlé dans le § 28.

Le D^r. PLAYFAIR pense que les anciens ont compris sous le nom de *porismes* des propositions qui affirment la possibilité de trouver des conditions qui rendent un problème indéterminé ou susceptible d'un nombre illimité de solutions (1). Je me propose d'éclaircir ce sentiment par un petit nombre d'exemples simples, et de montrer la liaison des porismes ainsi entendus avec les lieux géométriques.

Premier exemple. Soient deux points et une droite donnés de position : trouver sur cette droite un point, tel que la différence des carrés des distances de ce point aux points donnés soit donnée de grandeur.

Solution. Par le § 57, soit cherché le lieu des points dont la différence des carrés des distances aux points donnés est égale à l'espace donné. Si la droite donnée de position convient avec le lieu ainsi déterminé, la question proposée est indéterminée, et tous les points de la droite donnée de position satisfont à la question. Si la droite donnée de position ne rencontre pas ce lieu, le problème proposé est impossible. Si la droite donnée de position rencontre ce lieu, le point de section de cette droite et de ce lieu est le point cherché.

Second procédé. Soient A et A' les points donnés de position; et que la droite donnée de position rencontre AA' en un point S sous un angle donné φ.

$$AX^2 = AS^2 + SX^2 - 2AS \times SX \cos. \varphi$$
$$A'X^2 = A'S^2 + SX^2 - 2A'S \times SX \cos. \varphi$$
$$AX^2 - A'X^2 = AS^2 - A'S^2 - 2AA' \times SX \cos. \varphi.$$

[1] Voyez le Mémoire de cet Auteur dans les Transactions philosophiques d'Edimbourg, Tom. II.

Soit AA′ coupée en deux parties égales au point C, $AS^2 - A'S^2 = 2AA' \times CS$. Soit l'espace donné de grandeur égal au rectangle $2AA' \times CE$; on obtient l'équation $CS - SX \cos. \varphi = CE$; ou $SX \cos. \varphi = CS - CE = SE$; partant, la droite EX est perpendiculaire à AA′; on obtient $SX = \frac{CS - CE}{\cos. \varphi}$.

Aussi long-tems que l'angle φ n'est pas droit; ou que cos. φ n'est pas zéro, le point X peut être déterminé. Lorsqu'on a en même tems cos. $\varphi = 0$, et $CS = CE$; l'expression de SX est $\frac{0}{0}$; elle devient le signe de l'indétermination; alors, la droite donnée de position convient avec le lieu des points qui satisfont généralement à la condition proposée. Lorsque cos. $\varphi = 0$, tandis que CS n'est pas égale à CE, la droite donnée de position est perpendiculaire à AA′, et partant parallèle au lieu qui satisfait à la condition proposée sans convenir avec lui; le problème est impossible, et cette impossibilité est indiquée par l'expression $SX = \frac{CS - CE}{0}$.

Second exemple. Soient deux points donnés de position, et soit un cercle donné de grandeur et de position. Trouver sur la circonférence de ce cercle un point duquel menant des droites aux points donnés la somme de leurs carrés soit égale à un espace donné de grandeur.

Solution. Par le § 38 soit cherché le lieu des points qui répondent à la condition proposée. Si le cercle donné convient avec le cercle dont la circonférence est le lieu de ces points, le problème est indéterminé, et tous les points de la circonférence du cercle donné satisfont à la question. Si les circonférences de ces deux cercles ne se rencontrent pas, le problème est impossible. Si ces circonférences se rencontrent, chacun des points de rencontre satisfait à la question.

Second procédé. Soient A et A′ les points donnés de position; soit S le centre du cercle donné, et soit r son rayon. Soit C le milieu de AA′, et soit X le point cherché sur la circonférence du cercle donné; on a

$$AX^2 + A'X^2 = 2AC^2 + 2CX^2 \ (\S\ 38);$$
$$= 2AC^2 + 2(CS^2 + r^2 - 2CS \times r \cos. S).$$

Soit $AX^2 + A'X^2 = 2E$; $2CS \times r \cos. S = AC^2 + CS^2 + r^2 - E$.

$$\cos. S = \frac{AC^2 + CS^2 + r^2 - E}{2CS \times r}.$$

Que les points C et S coïncident, ou soit $CS = 0$, et qu'en même tems on donne $E = AC^2 + r^2$; on a cos. $S = \frac{2}{0}$, ou le signe de l'indétermination. Dans la supposition

supposition SC=o ; qu'on n'ait pas E=AC²+r² ; l'expression $\frac{AC^2+r^2-E}{o}$ est le signe de l'impossibilité ; les deux cercles sont concentriques et ne se rencontrent pas. Que SC ne soit pas zéro, ou que les deux cercles ne soient pas concentriques. 1.° Soit E<AC²+CS²+r² ; on doit avoir $\frac{AC^2+CS^2+r^2-E}{2CS\times r}\gtrless 1$; ou E≷ AC²+(CS-r)². 2.° Soit E>AC²+CS²+r² ; on doit avoir $\frac{E-(AC^2+SC^2+r^2)}{2CS\times r}\gtrless 1$; et E≷AC²+(CS+r)². Partant, l'espace E est susceptible de limite soit en grandeur soit en petitesse ; et les points de la circonférence donnée auxquels répondent ces limites sont ceux dans lesquels la droite qui joint le centre du cercle donné avec le milieu de la droite donnée coupe la circonférence donnée ; et à ces limites répondent des points de contact des deux circonférences.

Remarque. Ces deux exemples simples relatifs, l'un à la ligne droite, et l'autre à la circonférence du cercle, me paroissent suffire pour éclaircir la liaison qui règne entre les lieux géométriques et les porismes entendus suivant le sentiment du D.r PLAYFAIR.

Qu'un point, duquel dépend la solution d'une question proposée, soit déterminé à être sur une ligne droite, ou sur une ligne circulaire, qui sont les lieux des points qui jouissent d'une propriété commune dont ce point doit jouir pour qu'il satisfasse à la question. Que par l'énoncé de la question, ce point doive être situé sur une ligne de même nature respectivement. Si ces deux lignes coïncident, la question proposée est indéterminée ; et cette indétermination est indiquée algébriquement par le signe $\frac{0}{0}$ (qui ne provient pas d'une fraction dont les termes ont un diviseur commun évanouissant dans le cas particulier dont il s'agit). Si ces deux lignes correspondantes sont des droites parallèles entr'elles ou des circonférences concentriques ; la question proposée est impossible, et ce genre d'impossibilité est indiqué par le signe $\frac{1}{0}$, ou par celui de l'infini. Dans le cas où ces lignes correspondantes se rencontrent, le problème est possible. Que les lignes correspondantes soient des droites (non parallèles entr'elles), leur point de rencontre est unique, et le problème proposé a une seule solution. Que les lignes correspondantes soient une droite et une circonférence de cercle, ou deux circonférences de cercle (non concentriques) ; si elles se coupent, la question proposée a deux solutions ; si elles se touchent, la question proposée a une solution unique, et l'une des quantités mentionnées dans l'énoncé est susceptible d'un maximum ou d'un minimum ; enfin, si ces

lignes ne se rencontrent pas, la question est impossible, et ce genre d'impossibilité est indiqué par le signe de l'imaginaire $\sqrt{-1}$.

On peut appliquer à un grand nombre de questions, ce qui vient d'être dit soit particulièrement sur les deux exemples proposés, soit généralement. Je vais en énoncer quelques-unes.

Soient trois droites données de position ; trouver sur l'une d'elles un point duquel abaissant sur les deux autres des perpendiculaires, leur rapport soit donné (Voy. § 33).

Soient des droites données de position ; trouver sur l'une d'elles un point, duquel abaissant sur chacune des autres des perpendiculaires, la somme de leurs rectangles par des droites données de grandeur, soit donnée de grandeur (Voy. §§ 35 et 36).

Soient trois droites données de position, et soit un point donné de position (qui n'est situé sur aucune de ces droites). Mener par ce point une droite qui rencontre les droites données, de manière que les points de rencontre et le point donné soient des points de section harmonique (Voyez § 47).

Soit un cercle donné de grandeur et de position, soit une droite donnée de position, et soit un point donné de position (non sur la circonférence du cercle). Mener par ce point une droite qui rencontre la circonférence et la droite donnée, de manière que les points de rencontre et le point donné soient des points de section harmonique. (Voy. § 49).

Tout étant posé comme dans l'exercice précédent ; on demande sur la droite donnée un point duquel menant des tangentes au cercle donné, la droite qui joint les points de contact passe par le point donné (Voy. § 50).

Soit un cercle donné de grandeur et de position ; soient deux tangentes à ce cercle données de position ; et soit une droite donnée de position. Mener à ce cercle une tangente, de manière que le point de contact, les points dans lesquels elle rencontre la tangente, et le point dans lequel elle rencontre la droite donnée, soient des points de section harmonique.

Le cas indéterminé a lieu lorsque la droite donnée de position est la droite qui joint les points de contact des deux tangentes. En effet, il est aisé de montrer que si on a trois tangentes à un même cercle, chacune d'elles est coupée harmoniquement au point de contact, et aux points dans lesquels elle rencontre chacune des deux autres, et la droite qui joint leurs points de contact. Cette propriété de la section harmonique trouve son application aux sections coniques.

Soient deux cercles donnés de grandeur et de position, et soit un point

donné de position ; mener par ce point une droite telle, que le rapport de ses parties comprises entre ce point et les circonférences soit égal à un rapport donné, ou que le rectangle de ces parties soit donné (Voy. § 30).

Soient deux points donnés de position et soit un cercle donné de grandeur et de position ; trouver sur la circonférence de ce cercle un point, duquel menant des droites aux points donnés, elles comprennent entr'elles un angle donné.

Soit un cercle donné de grandeur et de position, soit une droite donnée de position ; soit aussi un point donné sur la circonférence de ce cercle. Mener par ce point une droite, telle que le rectangle de ses parties comprises entre le point donné et les points où elle rencontre la circonférence et la droite données, soit donné (Voy. § 28).

Soit un cercle donné de grandeur et de position, et soient deux points donnés de position. Trouver sur la circonférence de ce cercle le point duquel menant des droites aux points donnés leur rapport soit donné (Voy. § 45).

Soient des points en nombre quelconque donnés de position sur un plan ; et soient des exposans de rapports donnés de grandeur. Soit aussi un cercle donné de grandeur et de position. Trouver sur la circonférence de ce cercle un point duquel menant des droites aux points donnés, la somme des espaces, qui ont les rapports donnés aux carrés de leurs distances aux points donnés, soit égale à un espace donné de grandeur (Voy. §. 41).

Soit un cercle donné de grandeur et de position, soit une droite donnée de position, et soit un point donné de position. Trouver sur la circonférence de ce cercle un point duquel menant deux droites, l'une au point donné, et l'autre perpendiculaire à la droite donnée ; le carré de la première soit égal au rectangle de la seconde par une droite donnée de grandeur (Voy. § 44.)

Soit un quadrilatère donné de grandeur et de position ; mener une droite dont les parties comprises entre ses côtés soient entr'elles dans des rapports donnés (Voy. § 52).

Problème plus général. A un quadrilatère donné de grandeur et de position, inscrire un quadrilatère donné d'espèce (Voy. § 53).

Le D.r Playfair dans le mémoire déjà cité, a insisté d'une manière très-lumineuse sur ces deux derniers problèmes, pour éclaircir son sentiment sur la nature des porismes.

§ 129.

Problème. On demande un triangle dont on connoît la base, la hauteur et l'angle au sommet.

Puisque la hauteur du triangle cherché est donnée, et que sa base est donnée de grandeur et de position, le lieu de son sommet est une droite donnée de position parallèle à la base. Puisque l'angle au sommet est donné; le lieu du sommet est aussi la circonférence d'un segment de cercle capable de l'angle donné et décrit sur la base donnée comme corde. Partant, le sommet du triangle est le point de section (s'il y a lieu) de cette droite et de cet arc.

Algébriquement. Soit h la hauteur donnée du triangle, soit $2b$ sa base, et soit 2ϕ l'angle au sommet donné. Soit pris pour origine le milieu de la base; et soit x l'abscisse correspondante à l'ordonnée h. Les segmens de la base sont $b+x$ et $b-x$. L'angle 2ϕ au sommet est divisé par la hauteur en deux parties dont les tangentes sont $\frac{b+x}{h}$ et $\frac{b-x}{h}$; on a donc l'équation,

$$\text{tang. } 2\phi = \frac{\frac{b+x}{h} + \frac{b-x}{h}}{1 - \frac{bb-xx}{hh}}$$; de laquelle on tire

$$xx = bb + 2bh \cot. 2\phi - hh = (b+h \cot. \phi)(b-h \text{ tang. } \phi).$$

Segmens de la base $b \pm \sqrt{((b+h \cot. \phi)(b-h \text{ tang. } \phi))}$

De là, demi-somme des côtés, $\sqrt{(b(b+h \cot. \phi))}$

demi-différence des côtés, $\sqrt{(b(b-h \text{ tang. } \phi))}$.

Côtés, $\sqrt{(b(b+h \cot. \phi))} \pm \sqrt{(b(b-h \text{ tang. } \phi))}$.

Remarque. On peut parvenir immédiatement aux expressions de la somme et de la différence des côtés, comme il suit.

Soit $2x$ la somme des côtés
Soit $2y$ leur différence
. On a les deux équations

$(x+y)(x-y) \sin. 2\phi = 2bh$; ou $xx-yy = 2bh \text{ cosec. } 2\phi$

$(x+y)^2 - 2(x+y)(x-y) \cos. 2\phi + (x-y)^2 = 4bb$; ou $xx \sin.^2\phi + yy \cos.^2\phi = bb$.

De ces équations, on tire $\begin{matrix} xx = b(b+h \cot. \phi) \\ yy = b(b-h \text{ tang. } \phi) \end{matrix}$ comme précédemment.

Limite. Pour que le problème soit possible, on doit avoir $b \gtrless h \text{ tang. } \phi$, ou $h \lessgtr b \cot. \phi$. Lorsque $h = b \cot. \phi$ les deux côtés sont égaux entr'eux, et ils sont l'un et l'autre $b \text{ cosec. } \phi$. Cette limite s'accorde avec la construction géométrique, qui exige la rencontre des deux lieux de l'intersection desquels dépend la solution de la question proposée.

Exercice proposé. On demande un triangle dont on connoît l'angle au sommet,

sommet, et les segmens de la base faits par la perpendiculaire abaissée du sommet sur la base.

Première application. Partager un angle donné en deux parties dont le rapport des tangentes est donné.

Seconde application. Soient deux tangentes à un cercle données de position; Mener à ce cercle une troisième tangente qui rencontre les deux premières, de manière qu'elle soit coupée au point de contact dans un rapport donné.

§ 130.

Problème. Soit un angle donné, et soit un point donné de position sur le plan de cet angle : mener par ce point une droite telle que le rectangle de ses parties comprises entre ce point et les jambes de l'angle donné soit donné de grandeur.

Soit ACA′ un angle donné, et soit P un point donné de position sur le plan de cet angle : mener par P une droite XPX′ terminée en X et en X′ aux jambes de cet angle, de manière que le rectangle XP×PX′ soit égal à un espace *S* donné de grandeur. FIG. 65.

Analyse. Soit menée CP. Que l'espace donné S soit égal au rectangle de CP par une droite PB qui sera donnée de grandeur, laquelle soit portée sur le prolongement de CP depuis le point P. Soit menée BX.

Puisque XP×PX′=CP×PB; les quatre points X, C, X′, B, sont à la circonférence d'un même cercle; et partant, l'angle BCA′ est égal à l'angle BXP. Mais l'angle BCA′ est donné, donc l'angle BXP est aussi donné; mais BP est donnée de grandeur et de position, donc le point X est à la circonférence d'un segment de cercle donné; mais le point X est aussi à la droite CA donnée de position; donc le point X est donné.

Construction. Que l'espace S donné de grandeur soit égal au rectangle de CP par une droite PB, laquelle soit portée sur le prolongement de CP depuis le point P. Sur PB comme base soit décrit un segment de cercle capable de l'angle donné PCA′, et dont la circonférence rencontre (s'il y a lieu) CA en X. Que XP rencontre CA′ en X′, la droite XPX′ est la droite cherchée.

Démonstration. Elle découle de l'analyse.

Limite. Pour que le problème soit possible, le segment décrit sur PB comme base et capable de l'angle donné PCA′ doit rencontrer la droite CA. La plus petite valeur de la droite PB (et de l'espace S) a lieu lorsque la circonférence de ce segment touche la droite CA. Alors, l'angle du segment CXX′ est égal à l'angle CBX dans le segment alterne; mais l'angle CBX est égal à l'angle CX′X;

Digitized by Google

donc, le minimum a lieu lorsque les angles CXX', CX'X sont égaux entr'eux, et partant, lorsque le triangle XCX' est isoscèle, de manière que les côtés CX et CX' sont égaux entr'eux.

En effet, soit ACA' un triangle isoscèle retranché par la droite AA' menée par P, j'affirme $XP \times PX' > AP \times PA'$.

Dans le triangle PA'X', l'angle extérieur en A' est plus grand que PX'A'; et partant aussi PAX > PX'A'. Soit menée Ax faisant l'angle PAx égal à PX'A'; les triangles APx, X'PA' sont équiangles, et partant $AP \times PA' = xP \times PX'$, et partant $XP \times PX' > AP \times PA'$.

Remarque. La droite PB peut être portée sur CP de part et d'autre du point P; et cette droite étant portée du côté du sommet C, la solution correspondante répond à l'inclinaison de la droite XX' dans l'un des angles de suite de l'angle ACA'; et on obtient de même que la limite correspond au cas où le triangle retranché par XX' est isoscèle.

Solution algébrique. Par P soient menées PD, PD', respectivement parallèles à CA' et à CA, et qui rencontrent CA et CA' en D et en D'. Soit CD=a, CD'=a'. DX=x.

$$CD : DX = PX' : PX = XP \times PX' : PX^2$$
$$= XP \times PX' : a'a' - 2a'x \cos. C + xx.$$

Donc, $XP \times PX' = S = \frac{n}{x}(a'a' - 2a'x \cos. C + xx)$.

Soit $S = 2ad$; $xx - 2a'x \cos. C + a'a' = 2dx$.

$$x = d + a' \cos. C \pm \sqrt{(dd + 2a'd \cos. C - a'a' \sin.^2 C)}.$$

Pour que le problème soit possible, on doit avoir $d + a' \cos. C \geq a'$; $d \geq 2a' \sin.^2 \frac{1}{2} C$; soit $d = 2a' \sin.^2 \frac{1}{2} C$

$x = 2a' \sin.^2 \frac{1}{2} C + a' \cos. C = a'$; ou DX=CD', D'X'=CD; CX=CX'.

Autrement. Que l'angle de suite de l'angle C soit désigné par 2c; la somme des angles X et X' est 2c; soit leur différence 2x, les angles X et X' sont c-x et c+x.

$$PX = PD \frac{\sin. 2c}{\sin. X} = a' \frac{\sin. 2c}{\sin. c-x}; \quad PX' = PD' \frac{\sin. 2c}{\sin. X'} = a \times \frac{\sin. 2c}{\sin. c+x}.$$

$$XP \times PX' = aa' \frac{\sin.^2 2c}{\sin. (c+x) \sin. (c-x)}; \quad \text{soit } XP \times PX' = p.$$

$$\sin. c+x \sin. c-x = \frac{aa'}{p} \sin.^2 2c.$$

$$\cos. 2x - \cos. 2c = \frac{2aa'}{p} \sin.^2 2c; \quad \cos. 2x = \frac{2aa'}{p} \sin.^2 2c + \cos. 2c$$

$$1 - \cos. 2x = 2 \sin^2 x = 2 \sin.^2 c - \frac{2aa'}{p} \sin.^2 2c.$$

Digitized by Google

Pour que le problème soit possible, on doit avoir, $p \sin.^2 c \gtrless aa' \sin.^2 2c$; $p \gtrless 4aa' \cos.^2 c$.

§. 131.

Problème. On demande un triangle dont on connoît la base, la hauteur, et la différence des angles à la base.

Soit AA′ la base donnée d'un triangle AXA′ dont on connoît la base AA′ la hauteur XY, et la différence des angles à la base XAA′, XA′A. FIG. 66.

Analyse. Au triangle proposé soit circonscrit un cercle; et que la parallèle à la base menée par le sommet X rencontre de nouveau la circonférence en X′. La moitié de l'arc XX′ est la mesure de la différence donnée des angles XAA′, XA′A; et partant, cet arc est donné d'espèce. Soit Z le milieu de XX′, et du point Z soit élevée à XX′ une perpendiculaire qui rencontre AA′ en C. Le rapport de ZC à CA est donné, et partant, le triangle rectangle ZCA est donné d'espèce, et de là découle la construction suivante.

Dans un cercle quelconque soit menée une chorde xx′ qui retranche de ce cercle un segment capable de la moitié de la différence des angles à la base. Du milieu z de cette chorde soit élevée à xx′ une perpendiculaire ze, et du point z soit menée une droite za qui fasse avec zc un angle tel que le rapport de zc à la la perpendiculaire ca soit égal au rapport donné de la hauteur à la demi-base; que la droite za rencontre la circonférence en a. Si les droites zc et ca sont respectivement égales à la hauteur donnée et à la demi-base, le problème est résolu : si cela n'a pas lieu, soit fait une figure AA′X′X semblable à aa′x′x, de manière que les droites AA′ et CZ soient respectivement égales à la base et à la hauteur données. Le triangle XAA′ est le triangle demandé.

La démonstration découle de l'analyse.

Calcul. Soit 2b la base donnée, soit h la hauteur donnée; soit d la différence donnée des angles à la base. Soit 2x la différence des segmens de la base faits par la perpendiculaire abaissée du sommet sur la base. Les tangentes des angles à la base sont respectivement $\frac{h}{b-x}$, $\frac{h}{b+x}$. La tangente de la différence des angles à la base est

$$\frac{\frac{h}{b-x} - \frac{h}{b+x}}{1 + \frac{hh}{bb-xx}} = \frac{2hx}{hh+bb-xx} = \text{tang. d.}$$

De là ; $hh+bb-xx=2hx\cot.d$; $x=-h\cot.d\pm\sqrt{(bb+hh\operatorname{cosec.}^2 d)}$.

$b+x=b-h\cot.d\pm\sqrt{(bb+hh\operatorname{cosec.}^2 d)}$.

$b-x=b+h\cot.d\mp\sqrt{(bb+hh\operatorname{cosec.}^2 d)}$.

$hh+(b+x)^2=2bb+2hh\operatorname{cosec.}^2 d\pm 2(b-h\cot.d)\sqrt{(bb+hh\operatorname{cosec.}^2 d)}$

$=2\sqrt{(bb+hh\operatorname{cosec.}^2 d)}\,(\sqrt{(bb+hh\operatorname{cosec.}^2 d)}\pm(b-h\cot.d)$.

$hh+(b-x)^2=2\sqrt{(bb+hh\operatorname{cosec.}^2 d)}\,(\sqrt{(bb+hh\operatorname{cosec.}^2 d)}\mp(b+h\cot.d)$.

§ 132.

Problème. On demande un triangle dont on connoît la base, l'angle au sommet, et la somme des côtés.

FIG. 67. Soit AA′ la base donnée du triangle cherché, dont on connoît l'angle au sommet AXA′ et la somme des côtés AX+A′X.

Analyse. Soit conçu le côté AX prolongé en Y d'une quantité XY égale à l'autre côté A′X. Soit conçue menée A′Y. La droite AY est la somme donnée des côtés ; et partant, le lieu des points Y est la circonférence d'un cercle dont le centre A et le rayon AY sont donnés. Dans le triangle isoscèle A′XY, l'angle Y est la moitié de l'angle donné AXA′; et partant, le lieu des points Y est la circonférence d'un segment de cercle donné dont AA′ est la base, et capable de l'angle donné $\frac{1}{2}$ AXA′. Donc, le point Y est la section (si elle a lieu) de ces deux circonférences. De là, découle la construction suivante.

Construction. Sur la base donnée AA′ comme corde soit décrit un segment de cercle capable de l'angle qui est la moitié de l'angle au sommet donné. Dans ce cercle, depuis le sommet A soit inscrite une corde égale à la somme donnée des côtés. Soit menée A′Y; puis soit élevée à A′Y depuis son milieu une perpendiculaire qui rencontre AY en X. Le triangle AXA′ est le triangle cherché.

Démonstration. Elle découle évidemment de l'analyse.

Limite. Pour que le problème soit possible, la somme donnée des côtés AX, A′X, ne doit pas être plus grande que le diamètre du cercle auquel appartient le segment décrit sur AA′ comme corde, et capable d'un angle qui est la moitié de l'angle donné AXA′; soit désigné cet angle par ϕ. Le diamètre de ce cercle est AA′ $\operatorname{cosec.}\frac{1}{2}\phi$; donc, la plus grande valeur de la somme des côtés est AA′ $\operatorname{cosec.}\frac{1}{2}\phi$; lorsque cette plus grande valeur a lieu, le triangle AXA′ est isoscèle, le sommet X est le centre du cercle dont la circonférence est le lieu des points Y, et la valeur de chacun des côtés est $\frac{1}{2}$AA′ $\operatorname{cosec.}\frac{1}{2}\phi$.

Remarque. La construction précédente exige la description d'un segment de cercle capable d'un angle donné, et l'inscription à ce cercle d'une corde de grandeur

grandeur donnée ; et partant, elle dépend de l'intersection de deux circonférences de cercle. La construction suivante, qui découle de la même analyse, me paroît un peu plus simple.

Soit prise la droite AY égale à la somme donnée, à son extrémité Y soit fait l'angle Y égal à la moitié de l'angle donné au sommet. Puis du point A comme centre avec un rayon égal à la base donnée soit décrite une circonférence de cercle, qui rencontre (s'il est possible) en A′ l'autre jambe de cet angle. Du milieu de A′Y soit elevée à YA′ une perpendiculaire qui rencontre en X la droite AY, le triangle AXA′ est le triangle cherché.

Limite. Pour que le problème soit possible ; on doit avoir $AA' \gtreqless AY \sin. Y \gtreqless AY \sin. \frac{1}{2} X$; ou $AY \lesseqgtr AA' \operatorname{cosec}. \frac{1}{2} X$; conformément à ce qui précède.

Application du calcul à la construction. On peut appliquer le calcul à chacune des deux constructions précédentes. Je vais (comme exemple) l'appliquer à la seconde.

D'abord, on peut trouver la différence ou la demi-différence des angles à la base XAA′, XA′A. Soit AP perpendiculaire à A′Y.

$$AA'X = AA'Y - XA'Y = 2D - (AA'P + Y)$$

$$XAA' = AA'P - Y.$$

Donc, $AA'X - XAA' = 2D - 2AA'P$

$$\frac{AA'X - XAA'}{2} = 1D - AA'P.$$

$$\cos. \frac{AA'X - XAA'}{2} = \sin. AA'P = \frac{AP}{AA'} = \frac{AY \sin. Y}{AA'}.$$

$$= \frac{AY}{AA'} \sin. \tfrac{1}{2} X ; \text{ ou, } AA' : AY = \sin. \tfrac{1}{2} X : \cos. \frac{XA'A - XAA'}{2}.$$

On a donc le théorème suivant.

Dans tout triangle, la base est à la somme des côtés, comme le sinus du demi-angle au sommet est au cosinus de la demi-différence des angles à la base.

$$AX - A'X = A'P \sec. Y = \sqrt{(AA'^2 - AY^2 \sin.^2 Y)} \sec. Y$$

$$= \sqrt{(AA'^2 \sec.^2 Y - AY^2 \tan.^2 Y)}.$$

Partant, les côtés sont $\frac{AY \pm \sqrt{(AA'^2 \sec.^2 Y - AY^2 \tan.^2 Y)}}{2}$

Remarque 1.re Les valeurs, soit des côtés, soit des angles inconnus du triangle demandé, auroient pu être recherchées immédiatement comme il suit d'une manière algébrique.

Soit 2b la base donnée, soit 2s la somme donnée des côtés. Soit ϕ l'angle au sommet donné.

Soit 2x la différence cherchée des côtés; et partant, que les côtés soient $s+x$, $s-x$, on a l'équation

$4bb=(s+x)^2-2(s+x)(s-x)\cos.\phi+(s-x)^2$; de là, $xx=bb\sec.^2\frac{1}{2}\phi-ss\tang.^2\frac{1}{2}\phi$.

Item, soit 2z la demi-différence cherchée des angles à la base du triangle.

Ces angles sont $\begin{matrix}1\text{ Dr.}-(\frac{1}{2}\phi+z)\\ 1\text{ Dr.}-(\frac{1}{2}\phi-z)\end{matrix}$.

Côtés, $\begin{matrix}2b\times\frac{\cos.(\frac{1}{2}\phi+z)}{\sin.\phi}\\ 2b\times\frac{\cos.(\frac{1}{2}\phi-z)}{\sin.\phi}\end{matrix}$; somme des côtés, $4b\times\frac{\cos.\frac{1}{2}\phi\cos.z}{\sin.\phi}=2b\frac{\cos.z}{\sin.\frac{1}{2}\phi}=2s$.

Partant, $\cos.z=\frac{s}{b}\sin.\frac{1}{2}\phi$, comme précédemment.

Remarque 2.e Le procédé algébrique, fondé sur la doctrine des coordonnées, me paroît moins simple que celui qui vient d'être exposé.

Soit prise la base pour un des axes; et soit pris le milieu de la base pour l'origine. Soit x l'abscisse du sommet; soit y son ordonnée ou la hauteur du triangle.

L'angle au sommet est partagé par la hauteur en deux parties; dont les tangentes sont $\frac{b+x}{y}$ et $\frac{b-x}{y}$; de là, la tangente de ϕ est $\frac{2by}{xx+yy-bb}$.

Les carrés des côtés sont $(b+x)^2+yy$, $(b-x)^2+yy$. Mais, $xx+yy=bb+2by\cot.\phi$. Donc, les carrés des côtés sont

$\begin{matrix}2b(b+y\cot.\phi+x)\\ 2b(b+y\cot.\phi-x)\end{matrix}$. On a donc les deux équations

$xx+yy=bb+2by\cot.\phi$

$\sqrt{(2b(b+y\cot.\phi+x))}+\sqrt{(2b(b+y\cot.\phi-x))}=2s$; desquelles on tire

$y=\frac{ss-bb}{b}\tang.\frac{1}{2}\phi$; $xx=\frac{ss}{bb}(bb\sec.^2\frac{1}{2}\phi-ss\tang.^2\frac{1}{2}\phi)$

Remarque 3.e La simplicité de l'expression de la hauteur du triangle,

$y=\frac{ss-bb}{b}\tang.\frac{1}{2}\phi$, doit faire présumer qu'on peut l'obtenir d'une manière plus simple que celle qui a été suivie pour y parvenir. Dans ce but, je vais développer quelques propositions sur les triangles, remarquables par la fécondité de leurs applications.

FIG. 68. Soit ASA′ un triangle auquel est inscrit un cercle dont le centre est z, et qui en touche les côtés SA, SA′, AA′, en t, t′, et t″. Au même triangle soit

ex-inscrit un cercle dont le centre est Z, et qui touche en T, T', les côtés SA, SA' prolongés, et qui touche en T'' le côté AA'.

1.° J'affirme que ST est le demi-contour du triangle; et que les droites AT, St, At, sont respectivement les excès du demi-contour sur les côtés SA, AA', SA'.

Pour cela, je vais prouver que les tangentes A't'' et AT'' sont égales entr'elles.

En effet, $ST=ST'$; et $St=St'$. Donc, $tT=t'T'$;

Or, $tT=At+AT=At''+AT''$ et $t'T'=A't'+A'T'=A'T''+A't''$. Donc, $AT''=A't''$, Soit cont. $ASA'=C$.

$C=2St+2At+2A't'=2St+2At+2AT$;

donc, $St+At+AT=\frac{1}{2}C$.

$$AT=\tfrac{1}{2}C-SA$$
$$At=\tfrac{1}{2}C-SA'$$
$$St=\tfrac{1}{2}C-AA'.$$

2.° J'affirme que $At\times AT=zt\times ZT$.

En effet, soient menées les droites zA, ZA. Les angles zAt, ZAT, sont les moitiés des angles SAA', TAA'; et partant, la somme de ces angles vaut un droit. De là, les triangles rectangles zAt, AZT sont équiangles, et en particulier $zt:AT=At:ZT$; donc, $AT\times At=zt\times ZT$.

Savoir, dans tout triangle, le rectangle des excès du demi-contour sur les deux jambes d'un angle, est égal au rectangle du rayon du cercle inscrit à ce triangle, et du rayon de celui des cercles exinscrits qui est situé dans le même angle.

3.° J'affirme que $SZ\times Sz=SA\times SA'$.

Soient menées zA' et ZA'. Dans le quadrilatère AzA'Z, les angles opposés ZAz, ZA'z, sont l'un et l'autre droits; donc ce quadrilatère est inscriptible au cercle; et les angles dans le même segment zAA', zZA', sont égaux entr'eux; donc aussi, les angles SZA', SAz sont égaux entr'eux; mais les angles ZSA', zSA, sont aussi égaux entr'eux; donc, les triangles ZSA', ASz sont équiangles, et partant, $SZ:AS=SA':Sz$; et $ZS\times Sz=AS\times SA'$.

Savoir, dans tout triangle, le rectangle des deux jambes d'un angle, est égal au rectangle des distances de son sommet au centre du cercle inscrit, et au centre de celui des cercles exinscrits qui est situé dans le même angle.

4.° $Sz:St=1:\cos.\frac{1}{2}S$

$SZ:ST=1:\cos.\frac{1}{2}S$.

Donc, $ZS\times Sz:TS\times St=1^2:\cos.^2\frac{1}{2}S$; ou $AS\times SA':\frac{1}{2}C(\frac{1}{2}C-AA')=1^2:\cos.^2\frac{1}{2}S$.

Digitized by Google

Savoir, dans tout triangle, le rectangle des deux jambes d'un angle, est au rectangle du demi-contour par l'excès du demi-contour sur le côté opposé à cet angle, comme le carré du rayon est au carré du cosinus de la moitié de cet angle.

5.° $Sz : zt = 1 : \sin.\frac{1}{2}S$

$SZ : ZT = 1 : \sin.\frac{1}{2}S$

Donc, $ZS\times Sz : zt\times ZT = 1^2 : \sin.^2\frac{1}{2}S$; ou, $AS\times SA' : \frac{1}{2}(C-SA)\,(\frac{1}{2}C-SA') = 1^2 : \sin.^2\frac{1}{2}S$.

Savoir, dans tout triangle, le rectangle des deux jambes d'un angle est au rectangle des excès du demi contour sur les jambes de cet angle, comme le carré du rayon est au carré du sinus de la moitié de cet angle.

6.° $St : tz = 1 : \text{tang.}\frac{1}{2}S.$

$ST : TZ = 1 : \text{tang.}\frac{1}{2}S.$

$TS\times St : zt\times TZ = 1^2 : \text{tang.}^2\frac{1}{2}S$; ou $\frac{1}{2}C(\frac{1}{2}C-AA') : (\frac{1}{2}C-SA)\,(\frac{1}{2}C-SA') = 1^2 : \text{tang.}^2\frac{1}{2}S$.

Savoir, dans tout triangle, le rectangle du demi-contour par l'excès du demi-contour sur le côté opposé à un angle, est au rectangle des excès du demi-contour sur les jambes de cet angle, comme le carré du rayon est au carré de la tangente de la moitié de cet angle.

7.° Puisque $\sin.\frac{1}{2}S = \sqrt{\frac{TA\times At}{AS\times SA'}}$

$$\cos.\tfrac{1}{2}S = \sqrt{\frac{TS\times St}{AS\times SA'}}$$

$$\sin. S = 2\sin.\tfrac{1}{2}S\cos.\tfrac{1}{2}S = \frac{2\sqrt{(TA\times At\times TS\times St)}}{AS\times SA'}$$

Savoir, dans tout triangle, le rectangle des deux jambes d'un angle, est au double de la racine carrée du produit continuel du demi-contour et des excès du demi-contour sur les jambes de cet angle, comme le rayon est au sinus de cet angle.

8.° $AS\times SA'\sin. S = 2\sqrt{(TA\times At\times TS\times St)}$

Mais, $AS\times SA'\sin. S = 2\,ASA'$.

Donc, $ASA' = \sqrt{(TA\times At\times TS\times St)}$

$= \sqrt{(\frac{1}{2}C(\frac{1}{2}C-SA)\,(\frac{1}{2}C-SA')\,(\frac{1}{2}C-AA'))}$.

Savoir, dans tout triangle, l'expression de la surface est la racine du produit continuel du demi-contour et des excès du demi-contour sur chaque côté; ou bien, la surface d'un triangle est moyenne géométrique entre deux rectangles, tels, que les côtés de l'un sont le demi-contour et l'excès du demi-contour sur un des côtés, et que les côtés de l'autre sont les excès du demi-contour sur les deux autres côtés.

9.°

9.° $ASA' = ST \times tz = ST \times St \text{ tang. } \frac{1}{2} S$.

Savoir, dans tout triangle, le rayon est à la tangente de la moitié d'un angle, comme le rectangle du demi-contour par l'excès du demi-contour sur le côté opposé est à la surface du triangle.

Soit h la hauteur du triangle ASA' en prenant AA' pour base; $2ASA' = h \times AA'$;

$$h = \frac{2ST \times St \text{ tang. } \frac{1}{2} S}{AA'}.$$

L'utilité des différentes formules que je viens de développer se fait sentir principalement dans la trigonométrie proprement dite. Je vais en montrer les applications à quelques problèmes particuliers, en commençant par celui qui fait l'objet de ce §.

Première application. On demande un triangle dont on connoît la base, l'angle au sommet, et la somme des côtés.

Puisqu'on connoît la base du triangle cherché, et la somme de ses côtés, on connoît son contour et son demi-contour. Soit ST son demi-contour, et Tt la base donnée. Soit TSZ le demi-angle donné au sommet, et que TZ et tz rencontrent en Z et z, la jambe SZ. Puisque $TA \times At = ZT \times zt$; et que la somme Tt est donnée; on connoît les droites TA, At, en coupant la base donnée Tt en deux parties dont le rectangle est égal au rectangle donné $TZ \times tz$.

Calcul. Soit la base donnée, ... 2b.
Soit l'angle au sommet 2S.
Soit la somme donnée des côtés.... 2s.

$ST = s + b$; $St = s - b$.

$ZT = (s+b) \text{ tang. } S$; $zt = (s-b) \text{ tang. } S$; $ZT \times zt = (ss-bb) \text{ tang.}^2 S$.

$$\left(\frac{At-AT}{2}\right)^2 = bb-(ss-bb) \text{ tang.}^2 S = bb \text{ sec.}^2 S - ss \text{ tang.}^2 S.$$

$$\frac{At-AT}{2} = \sqrt{(bb \text{ sec.}^2 S - ss \text{ tang.}^2 S)}.$$

$At = b + \sqrt{(bb \text{ sec.}^2 S - ss \text{ tang.}^2 S)}$;

$AT = b - \sqrt{(bb \text{ sec.}^2 S - ss \text{ tang.}^2 S)}$.

$SA = s + \sqrt{(bb \text{ sec.}^2 S - ss \text{ tang.}^2 S)}$.

$SA' = s - \sqrt{(bb \text{ sec.}^2 S - ss \text{ tang.}^2 S)}$.

On ramène aisément au problème proposé les deux questions suivantes. A un cercle donné inscrire un triangle dont un angle est donné, et dont le contour est donné, ou dont l'excès des jambes de cet angle sur le côté opposé est donné. En effet, le côté opposé à l'angle donné est donné de grandeur, comme étant la base d'un segment capable de l'angle donné,

Digitized by Google

Seconde application. On demande un triangle dont on connoît la base, l'angle au sommet, et la différence des côtés.

Tout étant posé comme précédemment, la différence donnée des côtés SA, SA', est égale à la différence des droites At, AT; donc, on connoît la somme et la différence des droites At et AT, donc elles sont l'une et l'autre connues; donc aussi, leur rectangle est connu, donc le rectangle TZ×tz qui lui est égal est aussi connu.

Mais, le rectangle TS×St est au rectangle TZ×tz dans le rapport donné du carré du sinus total au carré de la tangente de la moitié de l'angle donné au sommet; donc, le rectangle TS×St est aussi donné; mais la différence Tt des droites TS et St est donnée; donc, ces droites sont connues.

Calcul. Base donnée . . . . . $2b = At+AT$

Différence donnée des côtés $2d = At-AT$

$b+d = At$

$b-d = AT$

$ZT\times zt = At\times AT = bb-dd.$

$ST\times St = ZT\times zt\cot.^2 S = (bb-dd)\cot.^2 S.$

$$\left(\frac{TS+St}{2}\right)^2 = bb + ST\times St = bb\,\mathrm{cosec.}^2 S - dd\cot.^2 S.$$

$$\frac{TS-St}{2} = b.$$

$$TS = \sqrt{(bb\,\mathrm{cosec.}^2 S - dd\cot.^2 S)} + b.$$

$$St = \sqrt{(bb\,\mathrm{cosec.}^2 S - dd\cot.^2 S)} - b.$$

$$SA = \sqrt{(bb\,\mathrm{cosec.}^2 S - dd\cot.^2 S)} + d.$$

$$SA' = \sqrt{(bb\,\mathrm{cosec.}^2 S - dd\cot.^2 S)} - d.$$

Troisième application. On demande un triangle dont on connoît la base, la hauteur, et la somme des côtés.

Puisque la base et la somme des côtés sont données, le contour du triangle est donné, et le demi-contour est aussi donné. Soit TS le demi-contour donné, et soit Tt la base donnée. Puisque la base et la hauteur sont données de grandeur, la surface du triangle est donnée, mais cette surface est ST×tz; donc, tz est donnée de grandeur; donc, la droite Sz est donnée de position, et partant la droite Tz est donnée de grandeur; donc, le rectangle TZ×tz est donné de grandeur; mais ce rectangle est celui de TA×At; donc, le point A est donné; et partant, le problème est résolu.

Calcul. Soit la base 2b, et soit la somme des côtés 2s; soit la hauteur h.

$$ST=s+b\,;\ St=s-b\,;\ tz=\frac{bh}{s+b}\,;\ TZ=\frac{bh}{s-b}.$$

$$\left(\frac{At-AT}{2}\right)^2=\left(\frac{AS-SA'}{2}\right)^2=\frac{bthh}{ss-bb}\,;\ \frac{AS-SA'}{2}=\frac{bh'}{\sqrt{(ss-bb)}}.$$

$$AS=s+\frac{bh}{\sqrt{(ss-bb)}}\,;\ A'S=s-\frac{bh}{\sqrt{(ss-bb)}}.$$

Quatrième application. Puisque $ss-bb:bb=hh:\left(\frac{AS-SA'}{2}\right)^2$;

$$ss:\quad bb=hh:hh+\left(\frac{AS-SA'}{2}\right)^2;$$

partant, connoissant la base d'un triangle, sa hauteur, et la différence de ses côtés, on connoît leur somme.

Cinquième application. Soit P un point donné sur le plan d'un angle donné ASA'; mener par ce point une droite AA' qui retranche de cet angle un triangle ASA' dont le contour soit donné.

Soit ST le demi-contour donné; soit SZ la droite qui coupe l'angle donné en deux parties égales; que TZ perpendiculaire à ST rencontre SZ en Z; la droite AA' est tangente au cercle dont Z est le centre et ZT le rayon.

Lorsque le point P est au dehors de l'angle ASA', le problème est toujours possible.

Lorsque le point P est au-dedans de l'angle ASA'; pour que le problème soit possible, le point P ne doit pas être au dedans du cercle dont Z est le centre et ZP le rayon. Partant, la limite a lieu lorsque le point P est sur la circonférence de ce cercle, et la détermination de la limite est réduite à décrire un cercle qui passe par le point P et qui touche deux droites SA et SA' données de position. Or, ce cercle est double, et partant, on détermine en même tems deux limites : ceci demande un éclaircissement.

Lorsque le point P est situé entre le sommet S et le cercle dont le centre et le rayon sont Z et ZT; chacune des tangentes à ce cercle menées du point P retranche un triangle ASA' dont le contour est double de ST.

Lorsque le point P est, relativement au sommet S, au-delà du cercle dont z est le centre et dont zt est le rayon; chacune des tangentes à ce cercle menées du point P en retranche un triangle ASA', dans lequel l'excès de la somme AS+SA' des côtés sur la droite AA' est double de St.

Partant, ces deux problèmes (lorsqu'ils sont possibles) sont liés l'un à l'autre d'une manière si intime, qu'on résout l'un des deux suivant la grandeur de

la ligne donnée ST ou St ; ou suivant la position du point P relativement aux cercles qui dépendent de la grandeur de cette ligne ; et la limite a lieu dans l'un et l'autre cas lorsque le point P est sur la circonférence de l'un de ces cercles.

On a donc hors de la limite $ZP > ZT$, ou $zP > zt$; et les deux limites se déterminent en même tems comme il suit.

$ZP^2 = SZ^2 - 2SZ \times SP \cos. PSZ + SP^2$; donc,

$SZ^2 - 2SZ \times SP \cos. PSZ + SP^2 \gtrless ZT^2$.

$SP^2 - 2SZ \times SP \cos. PSZ + ST^2 \gtrless o$.

$$SP^2 - 2SP \times ST \sec. \tfrac{1}{2} S \cos. PSZ + ST^2 \sec.^2 \tfrac{1}{2} S \cos.^2 PSZ \gtrless ST^2 \times \frac{\cos.^2 PSZ - \cos.^2 \frac{1}{2} S}{\cos.^2 \frac{1}{2} S}.$$

$$\gtrless ST^2 \times \frac{\cos. 2PSZ - \cos. S}{2 \cos.^2 \frac{1}{2} S}$$

$$\gtrless ST^2 \frac{\sin. ASP \sin. A'SP}{\cos.^2 \frac{1}{2} S}.$$

On a donc pour la limite les deux conditions suivantes :

d'une part ; $SP - ST \sec. \frac{1}{2} S \cos. PSZ \gtrless ST \sqrt{\frac{(\sin. ASP \sin. A'SP)}{\cos. \frac{1}{2} S}}$

d'autre part, $ST \sec. \frac{1}{2} S \cos. PSZ - SP \gtrless ST \sqrt{\frac{(\sin. ASP \sin. A'SP)}{\cos. \frac{1}{2} S}}$

La seconde condition donne $ST \gtrless \frac{SP \cos. \frac{1}{2} S}{\cos. PSZ - \sqrt{(\sin. ASP \sin. A'SP)}}$

$$\gtrless SP \times \frac{\cos. PSZ + \sqrt{(\sin. ASP \sin. A'SP)}}{\cos. \frac{1}{2} S}$$; et

partant, $SP \times \frac{\cos. PSZ + \sqrt{(\sin. ASP \sin. A'SP)}}{\cos. \frac{1}{2} S}$ est la plus petite valeur du demi-contour ST.

La première condition donne $St \lessgtr \frac{SP \cos. \frac{1}{2} S}{\cos. PSZ + \sqrt{(\sin. ASP \sin. A'SP)}}$

$$\lessgtr SP \frac{\cos. PSZ - \sqrt{(\sin. ASP \sin. A'SP)}}{\cos. \frac{1}{2} S}$$;

partant, $SP \times \frac{\cos. PSZ - \sqrt{(\sin. ASP \sin. A'SP)}}{\cos. \frac{1}{2} S}$ est la plus grande valeur du demi-excès de la somme $AS + SA'$ des côtés sur le côté AA'.

Sixième application. On demande un triangle dont on connoît la hauteur, l'angle au sommet, et la somme des jambes de cet angle.

Puisque

Puisque $St : tz = 1 : \text{tang.} \frac{1}{2} S$

$ST \times St : ST \times tz = 1 : \text{tang.} \frac{1}{2} S.$

Soit 2s la somme donnée des côtés; soit 2b la base cherchée, et soit h la hauteur.

$ss-bb : bh = 1 : \text{tang.} \frac{1}{2} S.$

et $ss-bb = bh \cot. \frac{1}{2} S.$

ou, $b(b+h \cot. \frac{1}{2} S) = ss$. Partant, la détermination de la demi-base b est ramenée à trouver deux droites dont on connoît la différence $h \cot. \frac{1}{2} S$ et le rectangle ss; la plus petite de ces droites est la demi-base cherchée.

On trouve $b = \sqrt{(ss + \frac{1}{4} hh \cot.^2 \frac{1}{2} S)} - \frac{1}{2} h \cot. \frac{1}{2} S.$

Septième application. On demande un triangle dont on connoît la hauteur, l'angle au sommet, et la différence des jambes de cet angle.

Soit 2d la différence des côtés; $ss-bb : bh = bh : bb-dd$; donc, $bh : bb-dd = 1 : \text{tang.} \frac{1}{2} S$; et $bb-dd = bh \text{ tang.} \frac{1}{2} S.$

$b(b-h \text{ tang.} \frac{1}{2} S) = dd$; et partant, la question proposée est ramenée à trouver deux droites dont on connoît la différence $h \text{ tang.} \frac{1}{2} S$ et le rectangle dd, la plus grande de ces droites est la demi-base cherchée.

On trouve $b = \sqrt{(dd + \frac{1}{4} hh \text{ tang.}^2 \frac{1}{2} S)} + \frac{1}{2} h \text{ tang.} \frac{1}{2} S.$

Huitième application. On demande un triangle dont on connoît la hauteur, l'angle au sommet, et le contour.

Soit h la hauteur, soit 2c le contour donné, soit 2s la somme cherchée des côtés, soit $2b = 2c - 2s$ la base, on a la proportion,

$c(c-2b) : bh = 1 : \text{tang.} \frac{1}{2} S$; de là, $c-2b : b = h : c \text{ tang.} \frac{1}{2} S$

$c-2b : 2b = b : 2c \text{ tang.} \frac{1}{2} S$

$c : b = h + 2c \text{ tang.} \frac{1}{2} S : c \text{ tang.} \frac{1}{2} S.$

$b = c \times \frac{c \text{ tang.} \frac{1}{2} S}{h + 2c \text{ tang.} \frac{1}{2} S}$; $c-b = s = c \times \frac{h + c \text{ tang.} \frac{1}{2} S}{h + 2c \text{ tang.} \frac{1}{2}} S$; partant, cette application est ramenée au problème originairement proposé dans ce §.

Neuvième application. On demande un triangle dont on connoît la hauteur, l'angle au sommet, et l'excès de la somme des côtés sur la base.

En conservant d'ailleurs les dénominations de l'application précédente; soit $s-b=d$.

$$(s+b)\,(s-b) : bh = 1 : \text{tang. } \tfrac{1}{2}S.$$
$$s+b : b = h : d \text{ tang. } \tfrac{1}{2}S.$$
$$s+b : s-b = h : h-2d \text{ tang. } \tfrac{1}{2}S.$$
$$s+b = d \times \frac{h}{h-2d \text{ tang. } \frac{1}{2}S}.$$
$$s-b = d$$
$$s = d \times \frac{h - d \text{ tang. } \frac{1}{2}S}{h-2d \text{ tang. } \frac{1}{2}S}.$$
$$b = d \times \frac{d \text{ tang. } \frac{1}{2}S}{h-2d \text{ tang. } \frac{1}{2}S}.$$

Partant, cette application est ramenée au problème originairement proposé dans ce §.

Dixième application. On demande un triangle dont on connoît la hauteur, la somme ou la différence des deux côtés, et la différence des angles à la base.

Fig. 66. Soit AXA′ un triangle dont on connoît la hauteur XY, la somme des côtés AX, A′X, et la différence des angles à la base A et A′.

Au triangle proposé soit conçu circonscrit un cercle; par le sommet X soit menée à la base AA′ une parallèle qui rencontre en X′ la circonférence de ce cercle; et soient menées AX′ et A′X′.

A cause des parallèles AA′, XX′, AX′=A′X, AX=A′X′, et l'angle XA′X′ est la différence des angles A et A′. Partant, dans le triangle XA′X′ on connoît la hauteur, la somme ou la différence des côtés XA′, X′A′, et l'angle au sommet XA′X′; donc, cette application est ramenée aux deux dernières.

Parmi les procédés algébriques qu'on peut appliquer à la solution de ce problème, les deux suivans m'ont paru les plus simples.

Soit 2s la somme des deux côtés, et soit 2d leur différence; soit h la hauteur; soit 2δ la différence donnée des deux angles à la base. Côtés, $\begin{matrix} s+d \\ s-d \end{matrix}$.

Les sinus des angles à la base sont $\frac{h}{s+d}$ et $\frac{h}{s-d}$;

et leurs cosinus sont $\sqrt{(1-\frac{hh}{(s+d)^2})}$, $\sqrt{(1-\frac{hh}{(s-d)^2})}$.

Le cosinus de leur différence est $\sqrt{(1-\frac{hh}{(s+d)^2})}\sqrt{(1-\frac{hh}{(s-d)^2})}+\frac{hh}{ss-dd}$

$= \cos. 2\delta$. De là, $(ss-dd)^2 \sin.^2 2\delta = (ss+dd)+2hh\,(ss-dd)\cos.^2 2\delta$.

Partant, on déterminera ss ou dd, suivant qu'on connoîtra dd ou ss.

Autrement. Soit 2d la différence donnée des angles à la base, soit 2φ leur somme cherchée. Angles à la base, φ+d, φ-d.

Côtés; h cosec. φ+d, h cosec. φ-d, ou $h\times\frac{1}{\sin.\varphi+d}$, $h\times\frac{1}{\sin.\varphi-d}$;

somme des côtés, $h\times\frac{2\sin.\varphi\cos.d}{\sin.\varphi+d\sin.\varphi-d}=h\times\frac{4\sin.\varphi\cos.d}{\cos.2d-\cos.2\varphi}=h\times\frac{2\sin.\varphi\cos.d}{\sin.^2\varphi-\sin.^2d}$.

différence des côtés, $h\times\frac{4\cos.\varphi\sin.d}{\cos.2d-\cos.2\varphi}=h\times\frac{2\cos.\varphi\sin.d}{\cos.^2d-\cos.^2\varphi}$.

Que cette somme ou cette différence soient égales à la somme ou à la différence donnée des côtés; on déterminera sin. φ dans le premier cas, et cos. φ dans le second cas.

Onzième application. On demande un triangle dont on connoît un angle, la surface et le contour.

Soit ASA′ un triangle dont on connoît l'angle S, le demi-contour ST et la surface. Puisque la surface est égale au rectangle du demi-contour ST par le rayon zt du cercle inscrit; le rayon zt est connu. Donc, dans le triangle rectangle Szt, on connoît l'angle en S et une jambe zt de l'angle droit; donc, ce triangle est déterminé, et en particulier la droite St est donnée de grandeur; donc aussi Tt ou la base AA′ est donnée de grandeur. FIG. 63.

Douzième application. On demande un triangle dont on connoît un angle, la surface, et l'excès de la somme des jambes de cet angle sur le côté opposé.

Dans le triangle Szt, la droite St est le demi-excès de la somme des côtés SA et SA′ sur le côté AA′; donc, la droite St est donnée de grandeur; donc, dans ce triangle le rayon zt du cercle inscrit est aussi donné de grandeur. Mais le rectangle ST×zt (qui est égal à la surface du triangle) est donné de grandeur; donc, le demi-contour ST est donné de grandeur; et partant, cette application est ramenée à la précédente.

Autre exercice. Déterminer un triangle en connoissant les rayons des trois cercles qui lui sont ex-inscrits.

Soient R, R′, R″, les trois rayons donnés.

Soit r le rayon cherché du cercle inscrit au triangle; et soit c son demi-contour cherché.

Les trois excès du demi-contour sur chacun des trois côtés sont entr'eux comme les trois quantités, $\frac{1}{R}$, $\frac{1}{R'}$, $\frac{1}{R''}$; ou comme les trois quantités

R'R'', RR'', RR'; et partant, ces trois excès et le demi-contour sont entr'eux comme les quantités

$$R'R'', RR'', RR', R'R''+RR''+RR'; \text{ et partant,}$$

$$r:R=R'R'':R'R''+RR''+RR'; \text{ et } r=\frac{RR'R''}{R'R''+RR''+RR'};$$

ou la relation qui a lieu entre les quatre rayons des cercles dont l'un est inscrit et dont les trois autres sont ex-inscrits, est $rR'R''+rRR''+rRR'-RR'R''=0$.,

Les excès du demi-contour sur les trois côtés sont

$$c\times\frac{r}{R}, c\times\frac{r}{R'}, c\times\frac{r}{R''}, \text{ ou}$$

$$c\times\frac{R'R''}{R'R''+RR''+RR'}; c\times\frac{RR''}{R'R''+RR''+RR'}, c\times\frac{RR'}{R'R''+RR''+RR'};$$

On a la proportion; $R : c\times\frac{r}{R'}=c\times\frac{r}{R''} : r=c:R''$;

Donc, $cc\times\frac{r}{R'}=RR''$; $ccr=RR'R''$; de là, $cc=R'R''+RR''+RR'$.

$$c=\sqrt{(RR'+R'R''+R''R)}.$$

$$c\times\frac{r}{R}=\sqrt{\frac{R'R''}{(RR'+R'R''+R''R)}}; c\times\frac{r}{R'}=\sqrt{\frac{RR''}{(RR'+R'R''+R''R)}}; c\times\frac{r}{R''}=\sqrt{\frac{RR'}{(RR'+R'R''+R''R)}}.$$

Côtés du triangle $\sqrt{\frac{R(R'+R'')}{(RR'+R'R''+R''R)}}, \sqrt{\frac{R'(R+R'')}{(RR'+R'R''+R''R)}}, \sqrt{\frac{R''(R+R')}{(RR'+R'R''+R''R)}}.$

Tangentes des demi-angles du triangle

$$\sqrt{\frac{R}{(RR'+R'R''+R''R)}}, \sqrt{\frac{R'}{(RR'+R'R''+R''R)}}, \sqrt{\frac{R''}{(RR'+R'R''+R''R)}}.$$

Sinus des angles du triangle

$$\frac{2R\sqrt{(RR'+R'R''+R''R)}}{(R+R')(R+R'')}, \frac{2R'\sqrt{(RR'+R'R''+R''R)}}{(R'+R)(R'+R'')}, \frac{2R''\sqrt{(RR'+R'R''+R''R)}}{(R''+R)(R''+R')}.$$

Surface du triangle $\sqrt{\frac{RR'R''}{(RR'+R'R''+R''R)}}=RR'R'':\sqrt{\frac{RR'R''}{r}}=\sqrt{rRR'R''}$.

Partant, la surface d'un triangle est exprimée par la racine carrée du produit continuel des quatre rayons des cercles dont l'un lui est inscrit et dont les autres lui sont ex-inscrits; ou bien la surface d'un triangle est moyenne géométrique entre deux rectangles, tels, que les côtés de l'un sont les rayons de deux de ces cercles, et les côtés de l'autre sont les rayons des deux autres cercles.

§ 133.

§ 133.

Le problème originairement proposé dans le § 132 est un cas particulier du problème suivant.

Problème. On demande un triangle dont on connoît la base, l'angle au sommet, et la somme (ou la différence) des rectangles de ses côtés par des droites données de grandeur.

Soit AA'X un triangle, dont on connoît la base AA', l'angle X au sommet, et la somme S des rectangles des côtés AX et A'X par les droites données de grandeur a et a'. Fig. 69.

Analyse. Soit prolongée AX en Y, de manière que $a\times AX+a'\times A'X=a\times AY$, et partant, $a'\times A'X=a\times XY$; partant, $A'X : XY=a : a'$. Dans le triangle A'XY on connoît l'angle X et le rapport des côtés A'X, XY, donc ce triangle est donné d'espèce, et en particulier l'angle Y est donné. De là découle la construction suivante.

Construction. Sur les jambes d'un angle égal au supplément de l'angle donné soient prises deux droites qui soient entr'elles dans le rapport de a à a'; que les extrémités de ces droites soient jointes par une droite. Soit Y l'extrémité de la droite qui correspond à a'. Sur la jambe de l'angle Y qui correspond à a' soit prise une droite ZA telle que le rectangle $AY\times a$ soit égale à l'espace donné de grandeur. Du point A comme centre avec un rayon égal à la base donnée soit décrite une circonférence de cercle, qui rencontre (s'il est possible) en A' l'autre jambe de l'angle Y; du point A' soit menée à AY une droite A'X inclinée à AY sous l'angle donné; le triangle AXA' est le triangle cherché.

Démonstration. Elle découle de l'analyse.

Limite. Pour que le problème soit possible, la circonférence décrite du point A comme centre, avec la base donnée pour rayon, doit rencontrer la seconde jambe de l'angle Y. Partant, la plus petite valeur de AA' est AY sin. Y.

Or, $\text{sin. Y}=\text{sin. X}\,\frac{A'X}{A'Y}=\text{sin. X}\times\frac{A'X}{\sqrt{(XY^2+2YX\times XA'\cos. X+A'X^2)}}$

$=\text{sin. X}\times\frac{a}{\sqrt{(aa+2aa'\cos. X+a'a')}}$; donc, la plus petite valeur de AA' est $AY\,\text{sin. X}\times\frac{a}{\sqrt{(aa+2aa'\cos. X+a'a')}}$; au contraire, la plus grande valeur de AY est $AA'\,\text{cosec. X}\times\frac{\sqrt{(aa+2aa'\cos. X+a'a')}}{a}$; et la plus grande valeur de l'espace proposé $a\times AY$ est $AA'\,\text{cosec. X}\sqrt{(aa+2aa'\cos. X+a'a')}$.

Solution algébrique. Soit ϕ l'angle donné ; soit $2b$ la base donnée ; et soit S l'espace donné de grandeur ; soient x et x' les deux côtés cherchés AX et A'X, on a les deux équations

$ax + a'x' = S.$

$xx - 2xx' \cos.\phi + x'x' = 4bb$; au moyen desquelles on détermine les valeurs de x et de x'.

En particulier, que l'angle ϕ soit droit, $\cos.\phi = 0$; et on cherche deux droites, dont on connoît la somme des carrés, et la somme de leurs rectangles par des droites données.

Remarque. La construction du cas dans lequel on donne la différence des rectangles des côtés AX et A'X par les droites a et a', diffère de celle du problème relatif à la somme, en ce qu'on porte les droites a et a' sur les jambes de l'angle proposé lui-même.

Application. Partager deux droites données l'une et l'autre en deux parties, de manière que la somme des carrés d'une des parties de l'une et d'une des parties de l'autre soit donnée de grandeur, et que la somme des carrés des deux autres parties soit aussi donnée de grandeur.

Fig. 70. Soient AB et A'B' deux droites données de grandeur, à couper en X en X', de manière que la somme des carrés de AX et de A'X' soit égale à un espace donné α^2, et que la somme des carrés des deux autres parties BX et B'X' soit égale à un autre espace donné ζ^2.

On a $AX^2 + A'X'^2 = \alpha^2$

et $BX^2 + B'X'^2 = \zeta^2$.

Soit $AB = 2AC$; et $A'B' = 2A'C'$;

$AX^2 + A'X'^2 + BX^2 + B'X'^2 = 2AC^2 + 2A'C'^2 + 2CX^2 + 2C'X'^2 = \alpha^2 + \zeta^2$.

$AX^2 + A'X'^2 - BX^2 - B'X'^2 = 4AC \times CX + 4A'C' \times C'X' = \alpha^2 - \zeta^2$.

Partant, on connoît la somme des rectangles des droites CX et C'X' par les droites données 4AC, 4A'C', et la somme de leurs carrés.

Remarque. Il seroit aisé de tirer aussi la solution de cette application du lieu qui fait l'objet du § 32.

§ 134.

Le problème résolu dans le § 132 (3.e Application) sur un triangle dont on connoît la base, la hauteur, et la somme ou la différence des côtés, est un cas particulier du problème suivant.

Problème. On demande un triangle dont la base est donnée de grandeur

et de position, dont la somme ou la différence des cotés est aussi donnée, et dont le sommet est sur une droite donnée de position.

Soit AXA′ un triangle dont la base AA′ est donnée de grandeur et de position, dont la somme ou la différence des côtés AX, A′X est donnée de grandeur, et dont le sommet X est sur une droite SX donnée de position (qui rencontre AA′ en S). On demande ce triangle.

Premier cas. Soit donnée la somme AX+A′X.

Analyse. Soit XP perpendiculaire à AA′, et soit AA′ coupée en deux parties égales au point C. FIG. 71.

Il est connu, que AA′ : AX+XA′ = AX—XA′ : AP—A′P.

Or, AA′ = 2AC; soit AX+XA′ = 2CB; AX-XA′ = 2(AX-CB), AP-A′P = 2CP; donc, AC : CB = AX-CB : CP. Soit AC : CB = CB : CD;

CB : CD = AX-CB : CP = AX : DP. Soit DE perpendiculaire à AA′ et rencontrant SX en E; DP = EX cos. S. Donc, AC : CB = AX : EX cos. S; ou, AC cos. S : CB = AX : EX. Soit menée AE. Dans le triangle AEX on connoît la base AE, l'angle AEX à la base, et le rapport des côtés AX, EX; donc, ce triangle est déterminé, et en particulier son sommet X est déterminé; donc aussi, le triangle AA′X est déterminé.

Construction. Soit AA′ coupée en C en deux parties égales; soit CB la demi-somme des côtés; à CA et CB soit trouvée une troisième proportionnelle CD; du point D soit élevée à CD une perpendiculaire qui rencontre en E la droite EX donnée de position; soit menée AE, et sur AE comme base soit décrit le triangle AEX, dont le sommet X soit sur la droite SEX donnée de position, et dont le rapport des côtés AX et CX soit égal au rapport donné de AC cos. S à CB; le triangle AXA′ est le triangle cherché.

Démonstration. Elle découle de l'analyse.

Remarque 1.re Si on opère depuis le point A′ de la même manière qu'on a opéré depuis le point A; on obtient un résultat semblable. Soit CD′ = CD; que D′E′ perpendiculaire à AA′ et élevée du point D′ rencontre SX en E′; soit menée A′E′; on obtient de même la proportion

AC cos. S : CB = A′X : E′X.

Limite. Pour que le problème soit possible, on doit avoir AX $\gtrless$ EX sin. AEX, ou A′X $\gtrless$ E′X sin. A′E′X; partant, dans la limite les angles EAX, E′A′X sont l'un et l'autre droits; et

AX : EX = sin. AEX : 1

A′X : E′X = sin. A′E′X : 1; mais on a toujours

AX : EX = CA cos. S : CB = A′X : E′X; donc, dans le cas de la limite

sin. AEX=sin. A'E'X; les triangles rectangles EAX, E'A'X sont équiangles; et partant, dans le cas de la limite les angles EXA, E'XA' sont égaux entr'eux.

J'affirme que le cas de la limite répond à la plus petite valeur de la somme AX+A'X, ou 2CB.

En effet, sur SX soit abaissée une perpendiculaire A'a, laquelle soit prolongée en a' d'une quantité aa'=A'a; et soit menée Xa'. On a toujours XA'=Xa'; les angles A'Xa, a'Xa égaux entr'eux; et la somme AX+XA' égale à la somme AX+Xa'; donc, la somme AX+XA' est la plus petite lorsque la somme AX+Xa' est la plus petite; c'est-à-dire, lorsque les trois points A, X, a', sont en ligne droite. Soit X' la position correspondante du point X; alors les angles a'X'a, AX'E sont égaux entr'eux; mais les angles a'Xa, A'Xa sont toujours égaux entr'eux; donc, dans le cas de la plus petite valeur de la somme AX+XA' les angles AX'E, A'X'E' sont égaux entr'eux.

On peut calculer cette plus petite somme comme il suit.

$$Aa'^2 = AA'^2 - 2AA' \times A'a' \cos. AA'a' + A'a'^2$$
$$= AA'^2 - 4AA' \times SA' \sin.^2 S + 4SA'^2 \sin.^2 S = (2SA' \sin. S - A'A)^2$$

et partant, la plus petite valeur de AX+XA' est 2SA' sin. S-AA'.

Les angles correspondant à la limite AX'E, A'X'E' se calculent comme il suit,

$$Aa' : AA' = \sin. A' : \sin. a'$$
$$2A'S \sin. S - AA' : A'A = \cos. S : \cos. SX'A.$$

De là, $A'S \sin. S : A'S \sin. S - AA' = \cos. S + \cos. X' : \cos. S - \cos. X'$
$$= \text{tang.} \tfrac{1}{2} SAX' : \text{tang.} \tfrac{1}{2} SA'X'.$$

Les côtés AX', A'X' répondant à la limite se calculent par la proportion

$$SA : SA' = AX' : A'X'$$
$$2SC : \frac{SA}{SA'} = 2SA' \sin. S - AA' : \frac{AX'}{A'X'}.$$

Remarque 2.e On peut aussi ramener le problème proposé à la section déterminée comme il suit.

Puisque $CA : CB = AX - CB : CP$
$$CA^2 : CB^2 = (AX - CB)^2 : CP^2$$
$$= CA^2 - (AX - CB)^2 : CB^2 - CP^2$$
$$CB^2 - CA^2 : CB^2 = CB^2 - CP^2 - CA^2 + (AX - CB)^2 : CB^2 - CP^2.$$

Or, $CB^2 - CP^2 - CA^2 + (AX - CB)^2 = AX^2 - 2AC \times CP - (CA^2 + CP^2)$
$$= AX^2 - AP^2 = PX^2.$$

Donc, $CB^2 - CA^2 : CB^2 = PX^2 : CB^2 - CP^2.$

Or, $PX = SP$ tang. S;

donc

Donc, $CB^2-CA^2 : CB^2 \text{ tang.}^2 S = SP^2 : CB^2-CP^2$; donc, le problème proposé est ramené à la section déterminée.

Item, puisque $CB^2-CA^2 : CB^2 = PX^2 : CB^2-CP^2$

$$= PX^2 : CB^2-(SC-SP)^2$$

$$= PX^2 : CB^2-SC^2+2SC\times PX \cot. S - PX^2 \cot.^2 S$$

$$CB^2-CA^2 : CB^2 \text{tang.}^2 S = PX^2 : CB^2 \text{tang.}^2 S - (SC \text{ tang. } S - PX)^2 ;$$

et partant, le problème est ramené à la détermination de PX.

Remarque 3.° On peut aussi ramener le problème proposé au problème suivant. Décrire un cercle, qui passe par deux points donnés, et qui touche un cercle donné.

En effet, du point A comme centre, avec un rayon égal à la somme donnée $AX+A'X$ soit décrite une circonférence de cercle; que AX prolongée rencontre cette circonférence en Z. On aura $XZ=A'X$. Partant, le point X est le centre d'un cercle qui passe par les points A et a' et qui touche la circonférence dont A est le centre et dont le rayon est la somme donnée $AX+XA'$, des côtés du triangle cherché.

Recherche algébrique. Soit $AS=a$; $A'S=a'$; soit $S=\phi$; soit $AX+XA'=2s$;

Soit $CS=\frac{a+a'}{2}=c$; $AC=\frac{a'-a}{2}=b$.

Soit $SX=x$; $AX=\sqrt{(aa-2ax\cos.\phi+xx)}$; $A'X=\sqrt{(a'a'-2a'x\cos.\phi+xx)}$. On a l'équation, $\sqrt{(aa-2ax\cos.\phi+xx)}+\sqrt{(a'a'-2a'x\cos.\phi+xx)}=2s$; de laquelle on tire, $xx(ss-bb\cos.^2\phi)-2cx\cos.\phi(ss-bb)=(bc+ss)^2-a'a'ss$.

Second cas. Soit donnée la différence des côtés AX et A'X. Soit de même $AA'=2AC$. Soit $CB<CA$ la demi-différence donnée des côtés AX et A'X. $AX+A'X=2(AX-CB)$; on a donc la proportion FIG. 72.

$CA : AX-CB = CB : CP$; ou $CA : CB = AX-CB : CP$; soit $CA : CB = CB : CD$,

$$CB : CD = AX-CB : CP = AX : DP.$$

Que DE perpendiculaire à AA' rencontre SX en E; soit menée AE. $DP=EX\cos. S$; donc, $CA\cos. S : CB = AX : EX$. Partant, dans le triangle AEX on connoît la base AE, l'angle AEX, et le rapport des côtés AX, EX; donc, ce triangle est déterminé, et en particulier le sommet X du triangle AXA' est déterminé.

Les détails dans lesquels je suis entré pour la solution du problème relatif à la somme des droites AX, A'X, m'engagent à m'en tenir à l'exposition de l'analyse du problème relatif à leur différence. On peut faire sur cette seconde

Digitized by Google

question des observations correspondantes à celles qui ont été faites sur la première ; en particulier, on parvient à la proportion

$$CA^2 - CB^2 : CB^2 = PX^2 : CP^2 - CB^2.$$

Scholie. Ceux des lecteurs qui sont initiés dans la doctrine des sections coniques, reconnoîtront dans ce qui précède les propriétés fondamentales de l'ellipse et de l'hyperbole, relatives aux foyers et à la directrice.

Application de la limite à laquelle donne lieu la question proposée. Soit une figure rectiligne à laquelle on inscrit une figure rectiligne de même nom. Si parmi les figures inscrites il y en a une dont le contour est le plus petit ; les côtés adjacens à un des côtés de la première figure sont également inclinés à ce côté.

Fig. 73. *Premier exemple.* Soit $AA'A''$ un triangle, et soit $XX'X''$ un triangle qui lui est inscrit, de manière que les sommets X, X', X'', sont respectivement sur les côtés AA', A'A'', A''A. Que les angles $X'XA'$, $X''X'A''$, $XX''A$, soient respectivement égaux aux angles $X''XA$, $XX'A'$, $X'X''A''$. Le contour du triangle $XX'X''$ est plus petit que le contour de tout autre triangle inscrit au triangle $AA'A''$.

On détermine comme il suit les angles et le contour du triangle $XX'X''$.

$$A'X'X = 2D - (A' + A'XX') = A''X'X''$$

$$A''X''X' = 2D - (A'' + A'X'X) = A' - A'' + A'XX' = AX''X$$

$$AXX'' = 2D - (A + AX''X) = 2D - (A - A'' + A' + A'XX') = 2A'' - A'XX' = A'XX'.$$

Donc, $A'XX' = AXX'' = A''$

$$A'X'X = A''X'X'' = A$$

$$A''X''X' = AX''X = A'.$$

De là, les points X, X', X'', sont les pieds des perpendiculaires abaissées des sommets A'', A, A', sur les côtés opposés. En effet, dans ce cas les quadrilatères $AXX'A''$, $A'XX''A''$, $AX''X'A'$, sont respectivement inscriptibles aux cercles dont les côtés AA'', A'A'', AA', sont les diamètres ; et partant, les angles $A'XX'$ et AXX'', $A'X'X$ et $A''X'X''$, $A''X''X'$ et $AX''X$ sont respectivement égaux aux angles A'', A, A'.

Dans ce cas, $AX : AA'' = \cos. A : 1$; mais par les triangles semblables $AA''A'$, AXX'', $AX : AA'' = XX'' : A'A''$; donc, $XX'' = A'A'' \cos. A$.

De même, $XX' = AA'' \cos. A'$, $X'X'' = AA' \cos. A''$.

Le contour du triangle $XX'X''$ est donc $AA' \cos. A'' + A'A'' \cos. A + A''A \cos. A'$: substituant aux cosinus des angles A'', A, A', leurs valeurs dans les côtés

du triangle, et faisaot les réductions coovenables; on trouve pour l'expression du contour.

$$\frac{(AA'+A'A''+A''A)\,(AA'+A'A''-A''A)\,(AA'-A'A''+A''A)\,(-AA'+A'A''+A''A)}{2AA'\times A'A''\times A''A}$$

$=2A''X$ sin. $A''=2AX'$ sin. $A=2A'X''$ sin. A''. Savoir, le rapport qui règne entre le sinus total et le sinus d'un des angles du triangle proposé, est le même que celui qui règne entre la perpendiculaire abaissée de ce sommet sur le côté opposé et le demi-contour le plus petit du triangle inscrit.

Cette proportion peut être éclaircie comme il suit.

Du pied X de la perpendiculaire $A''X$ soient abaissées les perpendiculaires XZ, XZ', sur les côtés AA'', $A'A''$, la droite ZZ' est le demi-contour le plus petit du triangle inscrit; car, dans le quadrilatère $A''ZXZ'$ inscrit au cercle dont $A''X$ est le diamètre, $ZZ'=A''X$ sin. A''. Donc, c'est bien là l'expression du demi-contour le plus petit.

Second exemple. Soit $AA'A''A'''$ un quadrilatère proposé; et soit $XX'X''X'''$ un quadrilatère inscrit à lui de manière que (s'il est possible) les jambes des angles X, X', X'', X''', sont également inclinées aux côtés du premier quadrilatère sur lesquels ces sommets sont situés. On demande de déterminer (s'il est possible) ce second quadrilatère. FIG. 74.

$$A'X'X = 2D-(A'+A'XX') = A''X'X''.$$
$$A''X''X' = 2D-(A''+A''X'X'') = A'-A''+A'XX' = A'''X''X'''.$$
$$A'''X'''X'' = 2D-(A'''+A'''X''X''') = 2D-(A'-A''+A'''+A'XX') = AX'''X$$
$$AXX''' = 2D-(A+AX'''X) = A'-A''+A'''-A+A'XX' = A'XX'.$$

De cette équation on ne peut tirer aucune valeur de l'inconnue $A'XX'$; mais on obtient une relation déterminée entre les angles A, A', A'', A''' du quadrilatère proposé; savoir, uo quadrilatère étant proposé pour qu'on puisse lui inscrire un quadrilatère du contour le plus petit, les sommes des angles opposés du premier de ces quadrilatères doivent être égales entr'elles, et partant ce quadrilatère doit être ioscriptible au cercle. Alors, le nombre des quadrilatères du contour le plus petit qu'on peut inscrire est illimité. C'est ce que je vais développer.

Un quadrilatère étant proposé, on peut toujours lui circonscrire un quadrilatère de manière que les côtés du premier adjacens à un côté du second, lui soient également inclinés. Pour cela, des sommets du premier quadrilatère on doit élever des perpendiculaires aux droites qui coupent ses angles en deux parties égales. Le quadrilatère formé par ces perper dicolaires est le quadrilatère circooscrit demandé.

Soient $AA'A''A'''$ et $XX'X''X'''$ deux quadrilatères tels que les jambes des angles X, X', X'', X''', du second soient également inclinées aux côtés AA', A'A'', A''A''', A'''A, du premier, et que par conséquent le quadrilatère $XX'X''X'''$ jouisse de la propriété du minimum de contour; les inclinaisons des jambes des angles X, X', X'', X''', aux côtés AA', A'A'', A''A''', A'''A, sont respectivement les complémens des demi-angles X, X', X'', X''', du quadrilatère $XX'X''X'''$; partant, on a la proportion $A'X : A'X' = \cos.\frac{1}{2}X' : \cos.\frac{1}{2}X$; de là, on a la suite d'équations.

$$A'X\cos.\tfrac{1}{2}X = A'X'\cos.\tfrac{1}{2}X'$$
$$A''X''\cos.\tfrac{1}{2}X'' = A''X'\cos.\tfrac{1}{2}X'$$
$$A'''X''\cos.\tfrac{1}{2}X'' = A'''X'''\cos.\tfrac{1}{2}X'''$$
$$AX\cos.\tfrac{1}{2}X \qquad AX'''\cos.\tfrac{1}{2}X'''$$

Partant, $AA'\cos.\frac{1}{2}X + A''A'''\cos.\frac{1}{2}X'' = A'A''\cos.\frac{1}{2}X' + A'''A\cos.\frac{1}{2}X'''$.

Savoir, les deux sommes des produits des côtés opposés du quadrilatère circonscrit par les cosinus des demi-angles adjacens à ces côtés du quadrilatère inscrit, sont égales entr'elles.

De là, on peut déterminer les angles du quadrilatère inscrit dans les angles et dans les côtés du quadrilatère circonscrit.

En effet, on a l'équation

$$AA'\cos.\tfrac{1}{2}X + A''A'''\cos.(A''-A'+\tfrac{1}{2}X) = A'A''\cos.(A'-\tfrac{1}{2}X) + A'''A\cos.(A-\tfrac{1}{2}X).$$

De là, $\cos.\frac{1}{2}X(AA'-A'A''\cos.A'+A''A'''\cos.(A''-A')-A'''A\cos.A)$

$$= \sin.\tfrac{1}{2}X\,(\quad A'A''\sin.A'+A''A'''\sin.(A''-A')+A'''A\sin.A)$$

$$\text{De là, } \operatorname{tang}.\tfrac{1}{2}X = \frac{AA'-A'A''\cos.A'+A''A'''\cos.(A''-A')-A'''A\cos.A}{A'A''\sin.A'+A''A'''\sin.(A''-A')+A'''A\sin.A.}$$

La somme des carrés des deux termes de cette fraction est

$$AA'^2-2AA'\times A'A''\cos.A'+A'A''^2-2A'A''\times A''A'''\cos.A''+A''A'''^2-2A''A'''\times A'''A\cos.A'''+A'''A^2.$$
$$+2AA'\times A''A'''\cos.(A''-A')+2A'A''\times A'''A\cos.(A''-A''')$$
$$-2AA'\times A'''A\cos.A.$$

Soit cette somme QQ, on a les équations

$$Q\sin.\tfrac{1}{2}X = AA'-A'A''\cos.A'+A''A'''\cos.(A''-A')-A'''A\cos.A$$
$$Q\cos.\tfrac{1}{2}X = \quad A'A''\sin.A'+A''A'''\sin.(A''-A')+A'''A\sin.A.$$
$$Q\sin.\tfrac{1}{2}X' = -AA'\cos.A'+A'A'' - A''A'''\cos.A'' + A'''A\cos.(A'''-A'')$$
$$Q\cos.\tfrac{1}{2}X' = +AA'\sin.A' + A''A'''\sin.A'' + A'''A\sin.(A'''-A'')$$
$$Q\sin.\tfrac{1}{2}X'' = AA'\cos.(A-A''') - A'A''\cos.A'' + A''A''' - A'''A\cos.A'''$$
$$Q\cos.\tfrac{1}{2}X'' = AA'\sin.(A-A''') + A'A''\sin.A'' + A'''A\sin.A'''.$$
$$Q\sin.\tfrac{1}{2}X''' = -AA'\cos.A + A'A''\cos.(A''-A') - A''A'''\cos.A''' + A'''A$$
$$Q\cos.\tfrac{1}{2}X''' = AA'\sin.A + A'A''\sin.(A''-A') + A''A'''\sin.A'''.$$

sur

Sur AA′ soit un point x différent du point X; que xx′ parallèle à XX′ rencontre A′A″ en x′; que x′x″ parallèle à X′X″ rencontre A″A‴ en x″; que x″x‴ parallèle à X″X‴ rencontre A‴A en x‴. Soit menée x‴x j'affirme qu'elle sera parallèle à X‴X.

En effet, à cause du parallélisme on a les proportions

$$\begin{aligned}
&Xx : X'x' = A'X : A'X' = \cos.\tfrac{1}{2}X' : \cos.\tfrac{1}{2}X\\
&X'x' : X''x'' = \cos.\tfrac{1}{2}X'' : \cos.\tfrac{1}{2}X'\\
&X''x'' : X'''x''' = \cos.\tfrac{1}{2}X''' : \cos.\tfrac{1}{2}X''\text{; donc,}\\
&Xx : X'''x''' = \cos.\tfrac{1}{2}X''' : \cos.\tfrac{1}{2}X = AX : AX'''\text{;}
\end{aligned}$$

Donc, x‴x est parallèle à X‴X, et le quadrilatère xx′x″x‴ est équiangle au quadrilatère XX′X″X‴.

J'affirme que le quadrilatère xx′x″x‴ a le même contour que le quadrilatère XX′X″X‴. Pour cela; je vais exprimer le contour de la figure inscrite dans les côtés de la figure circonscrite et dans les angles de la figure inscrite.

Dans le triangle A′XX′; $XX' = A'X\cos.A'XX' + A'X'\cos.A'X'X$; on a donc les équations suivantes

$$\begin{aligned}
XX' &= A'X\sin.\tfrac{1}{2}X + A'X'\sin.\tfrac{1}{2}X'\\
X'X'' &= A''X'\sin.\tfrac{1}{2}X' + A''X''\sin.\tfrac{1}{2}X''\\
X''X''' &= A'''X''\sin.\tfrac{1}{2}X'' + A'''X'''\sin.\tfrac{1}{2}X'''\\
X'''X &= AX\sin.\tfrac{1}{2}X + AX'''\sin.\tfrac{1}{2}X'''.
\end{aligned}$$

De là,

$$XX' + X'X'' + X''X''' + X'''X = AA'\sin.\tfrac{1}{2}X + A'A''\sin.\tfrac{1}{2}X' + A''A'''\sin.\tfrac{1}{2}X'' + A'''A\sin.\tfrac{1}{2}X'''.$$

Substituant à sin. $\frac{1}{2}X$, sin. $\frac{1}{2}X'$, sin. $\frac{1}{2}X''$, sin. $\frac{1}{2}X'''$, leurs valeurs trouvées;

$$\sin.\tfrac{1}{2}X = \frac{AA' - A'A''\cos.A' + A''A'''\cos.(A''-A') - A'''A\cos.A.}{Q}$$

$$\sin.\tfrac{1}{2}X' = \frac{-AA'\cos.A' + A'A'' - A''A'''\cos.A'' + A'''A\cos.(A'''-A'')}{Q}$$

$$\sin.\tfrac{1}{2}X'' = \frac{AA'\cos.(A-A''') - A'A''\cos.A'' + A''A''' - A'''A\cos.A'''}{Q}$$

$$\sin.\tfrac{1}{2}X''' = \frac{-AA'\cos.A + A'A''\cos.(A''-A') - A''A'''\cos.A''' + A'''A}{Q}$$

on obtient $XX' + X'X'' + X''X''' + X'''X = Q$.

Il est donc vrai que lorsqu'on a pu inscrire à un quadrilatère AA′A″A‴ un quadrilatère XX′X″X‴ du contour le plus petit, on peut inscrire au même quadrilatère un nombre illimité de quadrilatères, qui ont tous les mêmes angles et le même plus petit contour.

Ce que j'ai dit sur les triangles s'étend (mutatis mutandis) aux figures quelconques d'un nombre impair de côtés ; savoir, à une figure rectiligne d'un nombre impair de côtés on peut inscrire une seule figure du même nom, du contour le plus petit.

Ce que j'ai dit sur les quadrilatères s'étend aussi (mutatis mutandis), aux figures quelconques d'un nombre pair de côtés ; savoir, pour qu'à une figure rectiligne d'un nombre pair de côtés on puisse inscrire une figure de même nom du contour le plus petit, les sommes des angles alternatifs de la première figure doivent être égales entr'elles ; et quand on a pu inscrire à une figure rectiligne une figure du même nom du contour le plus petit, le nombre des figures inscrites équiangles et isoperimetres entr'elles est illimité. On détermine les angles de la figure inscrite par l'équation : les sommes des produits des côtés alternatifs de la figure proposée par les cosinus des demi-angles adjacens de la figure inscrite sont égales entr'elles.

Comme cette application (quelque remarquable qu'elle puisse paroître) est une simple digression ; je ne crois pas devoir insister davantage sur ce sujet. Je l'ai traité plus au long dans mon ouvrage qui a pour titre, *De Relatione mutua capacitatis et terminorum figurarum, Warsoviæ, 1782* ; et en particulier j'ai éclairci l'exception que cette diversité des minima égaux entr'eux paroît apporter au principe fondamental de la doctrine des maxima et minima.

§. 135.

Problème. Soient trois points donnés de position sur une droite. Trouver sur cette droite un quatrième point, tel, que le rectangle de ses distances à deux des premiers points, soit au carré de sa distance au troisième de ces points, dans un rapport donné.

Que les points donnés soient A, A′, B ; et que le point cherché soit X. On demande que le rapport $AX \times XA' : BX^2$ soit égal à un rapport donné.

Enumération. Les points A et A′ jouant le même rôle dans la question proposée, les positions des trois points donnés se réduisent aux deux suivantes $\frac{BAA'}{ABA'}$.

La position BAA′ donne lieu aux quatre positions XBAA′, BXAA′, BAXA′, BAA′X.

La position ABA′ donne lieu aux deux positions XABA′, AXBA′.

Je vais examiner comme la première la position BXAA′.

FIG. 75. Sur AA′ comme diamètre soit décrit un cercle, auquel soit menée la tangente XT ; $AX \times XA' = XT^2$; et partant, le rapport de XT à BX est donné ; soit mené le rayon CT, et que Bb perpendiculaire à BAA′ rencontre

TX en b. TX : BX = CT : Bb ; donc, le rapport de CT à Bb est donné ; donc Bb est donnée de grandeur, et le point b est donné de position ; de là découle la construction suivante.

Construction. Du point B soit élevée à BA une perpendiculaire Bb ; soit changé le rapport donné du rectangle $AX \times XA'$ au carré de BX dans le rapport de $\frac{1}{4} AA'^2$ à Bb^2 ; sur AA' comme diamètre soit décrit un cercle, et du point b soit menée à ce cercle une tangente bT qui rencontre BA en X ; le point X est le point cherché.

Démonstration. Elle découle de l'analyse.

Remarque. Du point b situé hors du cercle dont AA' est le diamètre, on peut mener à ce cercle deux tangentes.

1.° Soit $Bb = \frac{1}{2} AA'$; la seconde de ces tangentes est parallèle à BA et ne la rencontre pas. Partant, dans ce cas la solution est unique.

2.° Soit $Bb < \frac{1}{2} AA'$; la seconde tangente rencontre en X' la droite BA prolongée dans la direction A'AB ; et on obtient la position XBAA'.

3.° Soit $Bb > \frac{1}{2} AA'$; la seconde tangente rencontre en X' la droite BA prolongée dans la direction BAA', et on obtient la position BAA'X'.

Partant, la position BXAA' est tellement liée avec les deux positions XBAA', BAA'X, que l'une ou l'autre de ces deux dernières positions est obtenue avec la première, ou qu'aucune d'elles n'est obtenue conjointement avec elle, suivant que le rapport donné de BX^2 à $AX \times XA'$ est un rapport du plus petit au plus grand, du plus grand au plus petit, ou le rapport d'égalité.

Les trois positions BXAA', $\frac{\text{XBAA'}}{\text{BAA'X}}$, peuvent donc être regardées comme déterminées simultanément.

Seconde position. BAXA'. Fig. 76.

Sur AA' comme diamètre soit décrit un demi-cercle, et que la perpendiculaire à AA' élevée depuis le point X rencontre en Y la circonférence de ce demi-cercle. $XY^2 = AX \times XA'$; et partant, le rapport de BX^2 à XY^2 est donné ; et le rapport de BX à XY est donné ; donc, le triangle BXY est donné d'espèce, et le point Y est à une droite BY donnée de position ; mais il est aussi à la circonférence d'un cercle donné ; donc, le point Y (s'il y a lieu) est donné.

Construction. Sur AA' comme diamètre soit décrit un demi-cercle. Soit fait au point B sur la ligne BA un angle tel que le rapport du carré du sinus total au carré de la tangente (trigonométrique) de cet angle soit égal au rapport

donné. Que l'autre jambe de cet angle rencontre (s'il y a lieu) en Y la circonférence du cercle dont AA′ est le diamètre. Soit YX perpendiculaire à AA′, le point X est le point cherché.

Démonstration. Elle découle de l'analyse.

Remarque 1.re Pour que le problème soit possible, l'angle B ne doit pas être plus grand que l'angle formé avec BA par la tangente menée par B au cercle dont AA′ est le diamètre. Le sinus de ce plus grand angle est $\frac{\frac{1}{2}AA'}{BC}=\frac{A'B-AB}{A'B+AB}$;

et l'exposant du plus grand rapport de $AX\times XA'$ à BX^2 est

$$\frac{(\frac{A'B-AB}{2})^2}{AB\times BA'}=\frac{(A'B-AB)^2}{4AB\times BA'}.$$

Remarque 2.e Lorsque le rapport donné est plus petit que celui qui répond à la limite, le problème a deux solutions, qui satisfont l'une et l'autre à la question dans le sens de l'énoncé.

Fig. 77. *Troisième position.* XABA′

Analyse. Sur AA′ comme diamètre soit décrit un demi-cercle; soit aussi conçue XT tangente à ce cercle; et qu'une perpendiculaire à AA′ élevée depuis le point B rencontre cette tangente en b.

$AX\times XA'=XT^2$; donc, le rapport de BX à XT est donné; mais les triangles rectangles XBb, XTC, sont semblables; donc, XT : BX = CT : Bb; donc, le rapport de CT à Bb est donné; et partant, Bb est donnée de grandeur et le point b est donné de position; donc, la tangente menée par b au cercle décrit sur AA′ est donnée de position; et le point X (s'il y a lieu) dans lequel elle rencontre ABA′ est aussi donné.

Construction. Sur AA′ comme diamètre soit décrit un demi-cercle. Que le rapport donné de $AX\times XA'$ à BX^2 soit celui de $\frac{1}{4}AA'^2$ au carré d'une droite Bb, laquelle soit élevée du point B perpendiculaire à AA′. Du point b soit menée (s'il est possible) une tangente à ce cercle, laquelle rencontre (s'il y a lieu) AA′ prolongée en X. Le point X est le point cherché.

La *démonstration* découle de l'analyse.

Limite. Pour que le problème soit possible, le point b ne doit pas être en dedans du cercle décrit sur AA′. Lorsque le point b est sur la circonférence décrite sur AA′, la solution est unique, et le rapport du rectangle $AX\times XA'$ au carré de BX est le plus grand possible.

Remarque. Que le point b soit hors de la circonférence. Du point b on peut mener

mener au cercle décrit sur AA′ deux tangeotes, et partaot, le problème proposé a deux solutions.

Soit le point B entre A et C.

1.° Soit Bb < AC; il y a deux points X l'un et l'autre dans la même positiou XABA′ qui satisfont à la questiou.

2.° Soit Bb = AC; il y a un seul point X qui satisfait à la questiou; l'une des tangentes devient parallèle à AA′ et ne la rencontre pas.

3.° Soit Bb > AC; il y a deux points X répondant aux deux positions XABA′, ABA′X qui satisfont à la questiou.

Soit le point B entre C et A′.

1.° Soit Bb < AC; il y a deux points X l'uo et l'autre daos la positiou ABA′X, qui satisfont à la questiou.

2.° Soit Bb = AC, il y a un seul point X dans la positiou ABA′X qui satisfait à la questiou.

3.° Soit Bb > AC, il y a deux points X qui satisfont à la questiou. L'un de ces points est dans la positiou ABA′X, l'autre de ces points est daus la positiou XABA′.

Quatrième position. AXBA′. Fig. 78.

Analyse. Sur AA′ comme diamètre soit décrit un cercle, et que XY perpendiculaire à AA′ rencoutre en Y la circonférence de ce cercle. AX×XA′ = XY². Donc, le rapport de XY à BX est donné; et le poiot Y est à une droite donnée de positiou menée par B et faisant avec AA′ un angle donné; mais, Y est aussi sur la circonféreoce dont AA′ est le diamètre; donc, le point Y est donné.

Construction. Soit fait au poiot B sur AA′ un angle ABY, tel, que le carré du rayon est au carré de la tangente de cet angle dans le rapport donné de BX² à AX×XA′. Que l'autre jambe de cet angle rencontre en Y la circonférence du cercle dont AA′ est le diamètre. Soit YX perpendiculaire à AA′. Le point X est le point de section cherché.

Démonstration. Elle découle de l'analyse.

Remarque. Le problème proposé est toujours possible, et il a deux solutions qui répondent aux deux positions AXBA′, ABXA′.

Le problème que je viens de résoudre appartient au problème général connu par les anciens sous le nom de la *section déterminée.* Le problème général est comme il suit. Quatre points étant donnés de position sur une ligne droite: trouver sur cette droite un cinquième point, tel, que le rectaogle de ses distances à deux des points doonés soit au rectangle de ses distances aux deux autres points donnés dans un rapport dooné. Soient A et A′ deux des points

donnés, soient B et B′ les deux autres points donnés; soit X le point cherché. On demande que les rectangles $AX \times XA'$ et $BX \times XB'$ soient entr'eux dans un rapport donné.

Positions des points donnés, AA′BB′, ABA′B′, ABB′A′.

Positions des points donnés et du point cherché.

XAA′BB′	XABA′B′	XABB′A′
AXA′BB′	AXBA′B′	AXBB′A′
AA′XBB′	ABXA′B′	ABXB′A′.

Ce dernier problème peut toujours être rameué au précédent. Pour cela, soient coupées AA′ et BB′ en deux parties égales aux points α et $\mathcal{C}$ respectivement.

Première position. XAA′BB′

$$AX \times XA' = \alpha X^2 - A\alpha^2 ; \quad BX \times XB' = \mathcal{C}X^2 - B\mathcal{C}^2.$$

1.° Soit $AX \times XA' : BX \times XB' = A\alpha^2 : B\mathcal{C}^2$; donc aussi, $\alpha X : \mathcal{C}X = A\alpha : B\mathcal{C}$.

2.° Soit $AX \times XA' : BX \times XB' > A\alpha^2 : B\mathcal{C}^2 = A\alpha^2 : B\mathcal{C}^2 - \mathcal{C}^2$.

Donc aussi, $\alpha X^2 : \mathcal{C}X^2 - \mathcal{C}^2 = A\alpha^2 : B\mathcal{C}^2 - \mathcal{C}^2$. Soit $\mathcal{C} = \mathcal{C}b = \mathcal{C}b'$, le rapport de αX^2 à $bX \times Xb'$ est donné.

3.° Soit $AX \times XA' : BX \times XB' < A\alpha^2 : B\mathcal{C}^2 = A\alpha^2 - \alpha^2 : B\mathcal{C}^2$; donc aussi, $\alpha X^2 - \alpha^2 : \mathcal{C}X^2 = A\alpha^2 - \alpha^2 : B\mathcal{C}^2$; soit $\alpha = \alpha a = \alpha a'$; le rapport de $aX \times Xa' : \mathcal{C}X^2$ est donné.

La réduction de tous les cas auxquels donne lieu le problème proposé sur quatre points donnés, à quelqu'un des cas auxquels donne lieu la question relative à trois points donnés, s'opère sensiblement de la même manière.

Application. On demande un triangle dont on connoît l'angle au sommet, et la somme ou la différence des jambes de cet angle, de même que la somme ou la différence de la base et de la hauteur.

Cet énoncé donne lieu à quatre problèmes particuliers; suivant que les quantités données sont les deux sommes, les deux différences, ou une des sommes et une des différences.

FIG. 79. Soit BB′ la somme ou la différenee de la base et de la hauteur.

1.° Soit AA′ la somme des deux côtés.

Soit BX la base et B′X la hauteur.

On a la proportion; $AA'^2 - BX^2 : 2BX \times XB' = 1 : \text{tang.} \frac{1}{2}S$; et partant, si on prend depuis le point B les droites Ba et Ba′ l'une et l'autre égales à AA′; on a la proportion.

$aX \times Xa' : BX \times XB' = 2 : \text{tang.} \frac{1}{2}S$; donc, le problème proposé est ramené à la section déterminée.

2.° Soit AA′ la différence des côtés ; on a la proportion

$$(BX^2-AA'^2) : 2BX\times XB' = 1 : \cot.\tfrac{1}{2}S ;$$

partant, le problème proposé est ramené de même à la section déterminée.

§ 136.

Problème. On demande un triangle dont on connoît la base, l'angle au sommet, et la droite qui divise l'angle au sommet en deux parties égales.

Ce problème peut être ramené à celui du § 132 ; sur un triangle dont on connoît la base, l'angle au sommet, et la somme des côtés, de la manière suivante.

Soit AA′X un triangle dont on connoît la base AA′, l'angle au sommet AXA′, et la droite XZ qui partage cet angle en deux parties égales. FIG. 80. 1.°

Soit AY la somme des côtés AX et A′X, et soit menée A′Y. L'angle en Y est la moitié de l'angle AXA′ ; partant, il est égal à l'angle AXZ, et les lignes XZ, A′Y sont parallèles. De là, les triangles AXZ, AYA′ sont semblables, et en particulier

$$AX : XZ = AY : A'Y = AY : 2A'X \cos.\tfrac{1}{2}AXA' ; \text{ donc,}$$

$$AX\times XA' : XZ\times AY = 1 : 2\cos.\tfrac{1}{2}AXA'. \text{ Mais (§ 132. 4.°)}$$

$$AY^2-AA'^2 : AX\times XA' = 4\cos.^2\tfrac{1}{2}AXA' : 1. \text{ Donc,}$$

$$AY^2-AA'^2 : XZ\times AY = 2\cos.\tfrac{1}{2}AXA' : 1 ; \text{ ou,}$$

$$AY^2-2AY\times XZ\cos.\tfrac{1}{2}AXA' = AA'^2 ; \text{ ou,}$$

$$(AY-XZ\cos.\tfrac{1}{2}AXA')^2 = AA'^2 + XZ^2\cos.^2\tfrac{1}{2}AXA' ;$$

partant, on connoît AY ou la somme des côtés, et le problème proposé est ramené à celui du § 132.

Construction. Soit prise CB égale au double de la droite donnée qui partage l'angle donné en deux parties égales ; soit fait l'angle BCD égal à la moitié de l'angle donné ; soit BD perpendiculaire à CD. Soit prolongée CD en Y, de manière que CY × DY soit égal au carré de la base donnée AA′ ; la droite CY est la somme des côtés AX et A′X. FIG. 80. 2.°

Démonstration. Elle découle de l'analyse.

Soit φ l'angle au sommet, 2b la base, et soit a la droite YZ qui coupe l'angle en deux parties égales, on a

$$AY = AX + A'X = a\cos.\tfrac{1}{2}\varphi + \sqrt{(4bb + aa\cos.^2\tfrac{1}{2}\varphi)}.$$

Cette somme est toujours réelle ; mais pour que le problème qui en découle soit possible, elle ne doit pas être plus grande que $2b\,\mathrm{cosec.}\,\frac{1}{2}\varphi$ (§ 132) ; on a

Digitized by Google

donc pour la condition de la limite, $2b \operatorname{cosec.} \frac{1}{2}\phi \gtrless a \cos \frac{1}{2}\phi + \sqrt{(4bb + aa \cos.^2 \frac{1}{2}\phi)}$; d'où l'on tire $b \gtrless a \operatorname{tang.} \frac{1}{2}\phi$; alors le triangle est isoscèle. Partant, la droite qui coupe l'angle donné en deux parties égales restant la même; la base du triangle est la plus petite lorsque le triangle est isoscèle.

Fig. 81. Cette limite peut être démontrée géométriquement comme il suit. Soient ASA', aSa', deux triangles ayant le même angle au sommet ASA'; et dont les bases AA', aa', passent par un même point Z de la droite qui coupe cet angle en deux parties égales. Que le triangle ASA' soit isoscèle; j'affirme que AA' est plus petite que aa'.

Par A soit menée à SA' une droite anti-parallèle Aα (en faisant l'angle $ZA\alpha = Za'A'$), qui rencontre aa' en α. Les quatre points A, α, A', a' sont au cercle, et partant, $AZ \times ZA' = \alpha Z \times Za'$; mais $AZ = ZA'$; donc, $AA' < \alpha a'$; et à plus forte raison $AA' < aa'$.

Remarque 1.re Lorsqu'on détermine deux lignes CY, DY, dont la différence CD est donnée, et dont le rectangle est donné, on obtient un second point Y' sur la droite CD de l'autre côté du point C, qui satisfait aussi à l'équation $CY' \times Y'D = AA'^2$; j'affirme que cette autre droite CY' répond à la différence de AX et de A'X, et au cas où la droite XZ coupe en deux parties égales l'angle de suite de l'angle AXA'.

Fig. 82. En effet, soit axa' un triangle dont l'angle extérieur est coupé en deux parties égales par une droite qui rencontre en z la base prolongée; et soit a'y parallèle à xz; ay est la différence des côtés ax, a'x; et on a la proportion
$ay : a'y = ax : xz$; $ay \times xz = ax \times a'y = ax \times 2a'x \sin. \frac{1}{2} axa'$; ou, $ax \times a'x : ay \times xz = 1 : 2\sin. \frac{1}{2} axa'$; mais, $ax \times a'x : aa'^2 - ay^2 = 1^2 : 4\sin.^2 \frac{1}{2} axa'$; donc, $aa'^2 - ay^2 : ay \times xz = 2\sin. \frac{1}{2} axa' : 1$; $ay^2 + 2ay \times xz \sin. \frac{1}{2} axa' = aa'^2$.

Remarque 2.e La proportion trouvée par l'analyse et sur laquelle est fondée la construction, donne le théorème suivant. Dans tout triangle, l'excès du carré de la somme des deux jambes d'un angle sur le carré du côté opposé, est au rectangle de cette somme par la droite qui divise l'angle en deux parties égales, comme le double du cosinus de la moitié de cet angle est au rayon.

On obtient de même le théorème suivant. Dans tout triangle, l'excès du carré du côté opposé à l'un des angles sur le carré de la différence de ses jambes, est au rectangle de cette différence par la droite qui divise son angle extérieur en deux parties égales, comme le double du sinus de la moitié de cet angle est au rayon.

On peut résoudre le problème proposé autrement comme il suit.

Fig. 80. Sur la base AA' soit décrit un segment de cercle capable de l'angle donné au sommet

sommet du triangle, et que la droite XZ prolongée rencontre en D l'arc du segment opposé, les angles AXD, A'XD étant égaux, le point D sera le milieu de cet arc, et le diamètre passant par D sera perpendiculaire à la corde AA'; soit ce diamètre DD' et qu'il rencontre AA' en C. Soit menée D'X. Les triangles rectangles DCZ, DXD', sont équiangles; partant, $DC : DZ = DX : DD'$; et $ZD \times DX = CD \times DD'$; mais, le rectangle $CD \times DD'$ est donné de grandeur; donc aussi, le rectangle $ZD \times DX$ est connu; mais, la droite ZX est donnée de grandeur; donc, les droites ZD et XD sont l'une et l'autre connues.

Construction. Sur la base AA' soit décrit un segment de cercle capable de l'angle donné, soit coupé en deux parties égales au point D l'arc du segment alterne; soit mené le diamètre DD' qui rencontre en C la corde AA'; soient déterminées deux droites dont la différence est égale à la droite qui partage l'angle au sommet en deux parties égales, et dont le rectangle est égal au rectangle donné $CD \times DD'$; du point D comme centre, avec un rayon égal à la plus grande de ces droites, soit décrite une circonférence de cercle qui rencontre en X l'arc du segment AD'A'. Le triangle AXA' est le triangle cherché.

Démonstration. Elle découle de l'analyse.

Remarque. La seconde des droites dont la différence est la droite donnée, et dont le rectangle est le rectangle donné, répond à la question dans laquelle l'angle extérieur du triangle proposé est coupé en deux parties égales.

Limite. Pour que le problème soit possible, on doit avoir $DX < DD'$; mais, $DC < DZ$; donc, à plus forte raison; $CD' > XZ$; et partant, la plus grande valeur de XZ est CD'. Or, $CD' = AC \cot. \frac{1}{2} AXA'$; donc, la plus grande valeur de XZ est $AC \cot. \frac{1}{2} AXA'$; $XZ \leqq AC \cot. \frac{1}{2} AXA'$; et $AC \geqq XZ \tang. \frac{1}{2} AXA'$; lorsque $AC = XZ \tang. \frac{1}{2} AXA'$ le triangle est isoscèle.

Remarque. 2.° Le problème proposé s'énonce ordinairement comme il suit. Par un point donné sur la droite qui coupe en deux parties égales un angle d'un triangle, ou son angle extérieur, mener une droite dont la partie comprise entre les jambes de cet angle soit égale à une droite donnée de grandeur. Ce problème a occupé plusieurs mathématiciens, qui en ont donné des solutions soit géométriques, soit algébriques, plus ou moins élégantes. Les deux solutions que j'ai données me paroissent les plus simples, et les plus abrégées, pour éviter les équations du quatrième degré auxquelles ce problème conduit, si on ne fait pas un choix convenable des quantités inconnues.

Recherche algébrique. Parmi les procédés purement algébriques auxquels donne lieu le problème proposé, le suivant, par lequel on cherche la somme et la différence des côtés AX, A'X, me paroît un des plus simples.

Soit $AXA'=\varphi$; $AA'=2b$; $XZ=a$; soit $AX+A'X=2x$; $AX-A'X=2y$.

Il est connu que $AX\times A'X=AZ\times ZA'+ZX^2$;

et que $AX:A'X=AZ:ZA'$. On a, $AZ=b\times\frac{x+y}{x}$; $A'Z=b\times\frac{x-y}{x}$.

$AZ\times ZA'=bb\times\frac{xx-yy}{xx}$; $AX\times A'X-AZ\times ZA'=(xx-yy)\left(1-\frac{bb}{xx}\right)$

$=\frac{(xx-yy)(xx-bb)}{xx}=aa$.

Item, $4bb=AX^2-2AX\times XA'\cos.AXA'+A'X^2$

$=(x+y)^2-2(xx-yy)\cos.\varphi+(x-y)^2=4xx\sin.^2\frac{1}{2}\varphi+4yy\cos.^2\frac{1}{2}\varphi$;

et de là, $(xx-yy)\cos.^2\frac{1}{2}\varphi=xx-bb$; d'où l'on obtient $\frac{xx-bb}{x}=a\cos.\frac{1}{2}\varphi$;

ou $xx-ax\cos.\frac{1}{2}\varphi=bb$, conformément à ce qui a été trouvé par le premier procédé géométrique.

§ 137.

Problème. Soient deux points et une droite donnés de position. Trouver sur cette droite deux points de chacun desquels menant des droites aux deux points donnés, elles comprennent à ces derniers points des angles donnés.

Fig. 83. *Lemme.* Soient deux cercles qui se coupent dans les points X et X'; soient leurs centres Z et Z'. Sur chacune des circonférences de ces deux cercles soit pris un point, soient ces deux points A et A'. De ces points soient abaissées sur XX' les perpendiculaires AB et A'B'. Du milieu D de AA' soit élevée à AA' une perpendiculaire qui rencontre XX' en E. Que ZZ' rencontre XX' en V. J'affirme que $AB\times ZV\pm A'B'\times Z'V=VE\times BB'$.

Cet énoncé donne lieu à trois cas principaux, qui dépendent des positions des centres Z et Z' et des points A et A' relativement à la droite XX'.

1.° Soient les points A et Z d'un même côté de XX'; et soient les points A' et Z' du même côté de XX'. On a les deux équations

$(AB-ZV)^2+BV^2=ZA^2=ZX^2=ZV^2+VX^2$

$(A'B'-Z'V)^2+B'V^2=Z'A'^2=Z'X^2=Z'V^2+VX^2$

De là, $2A'B'\times Z'V-2AB\times ZV=B'V^2-BV^2-AB^2+A'B'^2$

$=B'V^2-BV^2-B'E^2+BE^2$ (parce que $AE=A'E$).

Or, $B'V^2-B'E^2=EV(B'V+B'E)$

$BE^2-BV^2=EV(BE+BV)$; donc,

$2A'B'\times Z'V-2AB\times ZV=2EV\times BB'$;

et $A'B'\times Z'V-AB\times ZV=BB'\times EV$.

2.° Les points A et Z étant d'un même côté de XX′, que les points A′ et Z′ soient des deux côtés de XX′.

On a les deux équations $\begin{matrix}(AB-ZV)^2+BV^2=ZV^2+VX^2\\(A'B'+Z'V)^2+B'V^2=Z'V^2+VX^2,\end{matrix}$

desquelles on obtient, $AB\times ZV+A'B'\times Z'V=VE\times BB'$.

3.° Soient les points A et Z des deux côtés de XX′, et que les points A′et Z′ soient aussi des deux côtés de XX′.

On a les deux équations $\begin{matrix}(AB+ZV)^2+BV^2=ZV^2+VX^2\\(A'B'+Z'V)^2+B'V^2=Z'V^2+VX^2;\end{matrix}$

desquelles on obtient, $AB\times ZV-A'B'\times Z'V=VE\times BB'$.

Application au problème proposé. Soient A et A′ deux points donnés de position, et soit BB′ une droite aussi donnée de position. On demande sur cette droite deux points X et X′ tels, que menant les droites AX, AX′, A′X, A′X′, les angles XAX′, XA′X′ soient donnés de grandeur, et respectivement égaux à des angles donnés α et α'. Fig. 83 et 83.

Premier cas. Que les angles donnés α et α' soient égaux entr'eux. Les quatre points A, A′, X, X′, sont à la circonférence d'un même cercle. Soit Z le centre de ce cercle; ce centre Z est sur la droite DE perpendiculaire à AA′ et élevée depuis son milieu.

1.° Soient les angles α et α' l'un et l'autre droits. La droite XX′ est le diamètre du cercle qui passe par les points A et A′, le point E est le centre du cercle cherché, et EA=EA′ en est le rayon. Fig. 84. 1°.

2.° Que les angles égaux α et α' ne soient pas droits. Fig. 84. 2°.

$$ZE : VZ = 1 : \text{sin. E}$$
$$\text{et } VZ : AZ = \text{cos. } \alpha : 1.$$

Donc, $EZ : AZ = \text{cos. } \alpha : \text{sin. E}$. Soit menée AE. Dans le triangle AEZ on connoît la base AE, l'angle AEZ ou AED, et le rapport des côtés AZ et EZ; donc, ce triangle est déterminé, et en particulier le sommet Z de ce triangle est déterminé.

Construction. Que la perpendiculaire à AA′ élevée depuis le milieu D de AA′ rencontre en E la droite donnée de position. Soit menée AE. Sur la droite AE comme base soit décrit le triangle AEZ dont le sommet Z soit sur DE, et dont le rapport des côtés EZ et AZ soit égal au rapport donné de cos. α à sin. E; Le point Z est le centre du cercle cherché.

Remarque. Puisque $AZ=EZ\,\frac{\text{sin. E}}{\text{cos. }\alpha}$; $AZ>EZ$ sin. E; et partant, le problème est toujours possible.

Il y a deux points Z qui satisfont à la proportion $AZ : EZ = \sin. E : \cos. \alpha$; et partant aussi, il y a deux paires de points X et X′ qui satisfont à la question proposée.

Second cas. Que les angles α et α' ne soient pas égaux entr'eux.

Ce problème donne lieu à plusieurs cas; suivant que les points A et A′ sont l'un et l'autre d'un même côté de BB′, ou qu'ils sont l'un d'un côté de BB′ et l'autre de l'autre côté; et dans chacun de ces cas les angles donnés α et α', peuvent être l'un et l'autre aigus, ou l'un et l'autre obtus, ou l'un aigu et l'autre obtus; et l'un d'eux étant droit, l'autre peut être aigu ou obtus. Mais, pour éclaircir le procédé de la recherche, il me suffira de développer un de ces cas, par exemple celui dans lequel les points A et A′ sont d'un même côté de la droite donnée, et en même tems les angles α et α' sont l'un et l'autre aigus.

FIG. 85. Puisque les angles XAX′, XA′X′, sont respectivement égaux aux angles donnés α et α', les points A et A′ sont sur les circonférences de segmens de cercle décrits sur XX′ comme base, et respectivement capables des angles donnés α et α'. Soient Z et Z′ les centres de ces cercles; et que ZZ′ rencontre BB′ en V. Soient aussi AB, A′B′ perpendiculaires à XX′.

Par le lemme; $AB \times ZV - A'B' \times Z'V = BB' \times EV$.

Or, $VZ : VZ' = \cot. \alpha : \cot. \alpha' = \tang \alpha' : \tang. \alpha$; donc,

$$VZ' = VZ \frac{\tang. \alpha}{\tang. \alpha'}.$$

Donc, $VZ\left(AB - A'B' \frac{\tang. \alpha}{\tang. \alpha'}\right) = BB' \times EV$; et

$VZ : EV = BB' \tang. \alpha' : AB \tang. \alpha - A'B' \tang. \alpha'$; donc le rapport de VZ:EV est donné, et partant, le point Z est à une droite donnée de position menée par E; laquelle fait avec BB′ un angle dont la tangente est $\frac{BB' \tang. \alpha'}{AB \tang. \alpha - A'B' \tang. \alpha'}$; pour abréger, soit cet angle désigné par ζ; on a les proportions

$$EZ : VZ = 1 : \sin. \zeta$$
$$VZ : AZ = \cos. \alpha : 1.$$

Donc, $EZ : AZ = \cos. \alpha : \sin. \zeta$; donc le rapport de EZ à AZ est donné; donc, dans le triangle AEZ on connoit la base AE, l'angle AEZ, et le rapport des côtés EZ, AZ, donc ce triangle est déterminé, et en particulier le point Z est donné.

Construction. Soient AB et A′B′ perpendiculaires à la droite donnée de position. Du milieu D de AA′ soit élevée à AA′ une perpendiculaire qui rencontre BB′ en E. Du point E soit menée une droite EZ qui fasse avec BB′ un angle BEZ dont

dont la tangente est $\frac{BB' \text{ tang. } \alpha'}{AB \text{ tang. } \alpha' - A'B' \text{ tang. } \alpha}$; soit cet angle C. Soit menée AE; et sur AE soit décrit le triangle AEZ dont l'angle AEZ est donné, et dont le rapport des côtés EZ, AZ, soit égal au rapport donné de cos. α à sin. C; le point Z est le centre et ZA est le rayon du cercle cherché, de manière que l'angle XAX′ dans le segment de ce cercle qui a pour base XX′ est égal à l'angle α.

La *démonstration* découle de l'analyse.

Remarque 1.re Pour que le problème soit possible, on doit avoir

$AZ \gtreqless EZ \text{ sin. } AEZ$; or, $AZ = EZ \frac{\text{sin. } C}{\text{cos. } \alpha}$; donc, $\text{sin. } C \gtreqless \text{sin. } AEZ \text{ cos. } \alpha$; cela a toujours lieu, en particulier, lorsque l'angle C étant aigu il est plus grand que l'angle AEZ. Lorsque le problème est possible, il a deux solutions; ou, il y a deux paires de points X et X′ qui satisfont à la question proposée.

Remarque 2.e Les autres cas auxquels le problème proposé donne lieu, dépendant seulement des différentes positions des points A et A′ relativement à la droite BB′, et des grandeurs des angles α et α' suivant lesquelles ils sont aigus, droits ou obtus; leur développement ne peut souffrir aucune difficulté.

Procédé algébrique. Soient a et b les coordonnées du point A; soient a′ et b′ les coordonnées du point A′. Soit $x \cos. \varphi + y \text{ sin. } \varphi = d$, l'équation de la droite BB′ donnée de position. Soient x et y les coordonnées du point X, et soient x′ et y′ les coordonnées du point X′.

Dans le triangle AXX′ les coordonnées des sommets A, X, X′, sont $\begin{matrix} a, x, x' \\ b, y, y' \end{matrix}$ respectivement; de là l'angle XAX′ a pour tangente

$$\frac{yx' - y'x - a(y-y') - b(x'-x)}{(x-a)(x'-a)}.$$

De même dans le triangle A′XX′ les coordonnées des sommets A′, X, X′, sont $\begin{matrix} a', x, x', \\ b', y, y', \end{matrix}$ respectivement; de là l'angle XA′X′ a pour tangente

$$\frac{yx' - y'x - a'(y-y') - b'(x'-x)}{(x-a')(x'-a')}.$$

Les points X et X′ étant sur la droite BB′; on a les équations

$$\begin{matrix} x \cos. \varphi + y \text{ sin. } \varphi = d \\ x' \cos. \varphi + y' \text{ sin. } \varphi = d \end{matrix},$$

on a aussi les deux équations $\frac{yx'-y'x-a(y-y')-b(x'-x)}{(x-a)(x'-a)} = \text{tang. } \alpha$

$$\frac{yx'-y'x-a'(y-y')-b'(x'-x)}{(x-a')(x'-a')} = \text{tang. } \alpha'.$$

Au moyen de ces quatre équations, on peut déterminer les quatre inconnues x, x', y, y'.

Ce procédé algébrique, fondé sur la doctrine générale des coordonnées, peut être remplacé avec avantage par le procédé suivant, aussi algébrique.

Que les droites AA′ et BB′ se rencontrent en C. Soit CA=a, CA′=a′. Soit CX=x, CX′=x′; C=γ.

Dans le triangle CAX, $\text{cot. CAX} = \frac{AC - CX \cos C}{CX \sin. C} = \frac{a}{x} \text{cosec. } \gamma - \text{cot. } \gamma.$

Dans le triangle CAX′, cot. CAX′= . . . . . $= \frac{a}{x'} \text{cosec. } \gamma - \text{cot. } \gamma$

Dans le triangle CA′X, cot. CA′X . . . . . $= \frac{a'}{x} \text{cosec. } \gamma - \text{cot. } \gamma$

Dans le triangle CA′X′, cot. CA′X′ . . . . . $= \frac{a'}{x'} \text{cosec. } \gamma - \text{cot. } \gamma$

De là, $\text{cot. XAX}' = \text{cot.}(\text{CAX}' - \text{CAX}) = \frac{aa \text{ cosec.}^2 \gamma + a(x+x') \text{ cot. } \frac{1}{2}\gamma + xx' \text{cosec.}^2 \gamma}{a \text{ cosec. } \gamma (x'-x)} = \text{cot. } \alpha$

De même, cot. XA′X′ . . . . . $= \frac{a'a' \text{cosec.}^2 \gamma + a'(x+x') \text{cot. } \frac{1}{2}\gamma + xx' \text{cosec.}^2 \gamma}{a' \text{ cosec. } \gamma (x'-x)} = \text{cot. } \alpha'$

Au moyen de ces deux équations on peut déterminer les deux inconnues x et x′, et partant, les positions des points X et X′.

§ 138.

Problème. Soit un triangle donné de grandeur et d'espèce. On demande le point (sur le plan de ce triangle) duquel menant des droites à ses sommets, elles comprennent entr'elles des angles donnés.

Fig. 86. Soit ABC un triangle donné. On demande le point P duquel menant des droites PA, PB, PC, aux sommets de ce triangle, les angles APB, BPC, CPA, soient égaux à des angles donnés γ, α, ζ, respectivement.

Analyse. Puisque les angles APB, BPC, sont donnés de grandeur; le point P est à la circonférence de chacun des segmens de cercle capables des angles donnés γ et α et décrits sur les bases AB, BC respectivement; donc, le point P est le point de section (s'il y a lieu) de ces deux circonférences.

Digitized by Google

Construction. Sur les droites AB, BC, comme bases soient décrits des segmens de cercle capables des angles donnés γ et α respectivement; si ces deux segmens se coupent en un autre point P, ce point de section est le point cherché.

Démonstration. Elle découle évidemment de la construction.

Remarque. Pour que le problème soit déterminé, les cercles auxquels appartiennent les segmens décrits sur AB et BC comme bases, doivent se rencontrer en un seul point. Si ces segmens appartiennent à un même cercle; et partant, si les points A, B, C, P, sont à la circonférence d'un même cercle, la question est indéterminée, et les angles α et γ sont déterminés à être respectivement égaux aux angles A et C.

Cette considération conduit à une seconde analyse et à une seconde construction, remarquables par la facilité avec laquelle on peut calculer par leur moyen, tant les grandeurs des distances du point cherché aux points donnés, que leurs inclinaisons aux côtés du triangle donné.

Seconde analyse. Au triangle ABC soit circonscrit un cercle. Pour que le problème soit déterminé, le point P ne doit pas être sur la circonférence de ce cercle; et partant, les angles APB, BPC, ne doivent pas être égaux aux angles C et A respectivement. Soient (par exemple) les angles APB, BPC, plus petits que les angles C et A respectivement; et partant, soit le point P au dehors du cercle circonscrit à ABC, et soit aussi la droite AC entre le point P et le sommet B du triangle.

Que les droites PA, PB, PC, rencontrent la circonférence de ce cercle dans les points A', B', C', respectivement; et soient menées les droites A'B', B'C', C'A'.

Dans le triangle A'B'C', $A' = A - \alpha$; $C' = C - \gamma$, $B' = B + \zeta$. Donc, les angles du triangle A'B'C' sont connus; et les rapports des côtés de ce triangle sont aussi connus.

Les triangles APB, CPB, sont respectivement semblables aux triangles B'PA', B'PC'; de là, on a les proportions suivantes

$$AP : PB' = AB : A'B'$$
$$PB' : PC = B'C' : BC.$$

Donc, $AP : PC = AB \times B'C' : A'B' \times BC = \frac{AB}{A'B'} : \frac{BC}{B'C'}$.

De là, dans le triangle APC on connoît l'angle P et le rapport des côtés qui sont jambes de cet angle; donc, ce triangle est donné d'espèce, et en particulier les rapports des côtés PA, PC, au côté AC, sont donnés; mais le côté AC est donné de grandeur, donc les côtés PA, PC, sont aussi donnés de grandeur.

Construction. Sur les jambes de l'angle ζ soient prises depuis le sommet des

Digitized by Google

droites qui soient entr'elles dans le rapport de $\frac{AB}{\sin. C-\gamma}$ à $\frac{BC}{\sin. A-\alpha}$, ou de $AB \sin. (A-\alpha)$ à $BC \sin. (C-\gamma)$; si la droite qui joint leurs extrémités est égale à AC, le triangle APC est le même que le triangle qui vient d'être construit; sinon il lui est semblable.

Démonstration. Elle découle de l'analyse.

Remarque 1.re Les trois droites PA, PB, PC, sont entr'elles comme les quantités $\frac{B'C'}{BC}$, $\frac{C'A'}{CA}$, $\frac{A'B'}{AB}$, ou comme les quantités $BA \times AC \sin. A-\alpha$, $AB \times BC \sin. B+\epsilon$, $AC \times CB \sin. C-\gamma$.

Remarque 2.e Réciproquement, le problème dans lequel on demande de déterminer le point P, en composant les rapports de ses distances aux trois points donnés A, B, C, est ramené au problème proposé, dans lequel les angles APB, BPC, CPA, sont donnés.

En effet, puisque les droites PA, PB, PC, sont entr'elles comme les quantités $\frac{B'C'}{BC}$, $\frac{A'C'}{AC}$, $\frac{A'B'}{AB}$; lorsque les rapports des trois premières droites sont donnés, les rapports de ces dernières quantités sont aussi donnés; mais les rapports des droites BC, AC, AB, sont donnés; donc aussi, les rapports des droites B'C', A'C', A'B', sont donnés; donc le triangle A'B'C' est donné d'espèce, et en particulier les angles de ce triangle sont donnés; mais les angles A', C', B', sont respectivement $A-\alpha$, $C-\gamma$, $B+\epsilon$; donc aussi les angles α, γ, ϵ sont donnés.

Partant, les deux problèmes dans l'un desquels on donne les angles en P, et dans l'autre desquels on donne les rapports des droites PA, PC, PB, sont liés l'un à l'autre d'une manière si intime, que la solution de l'un d'entr'eux entraîne celle de l'autre.

Scholie. Le second de ces problèmes peut aussi être résolu au moyen de l'intersection de deux lieux au cercle déterminés dans le § 45.

Fig. 87. *Remarque* 3.e Le cas général du problème proposé, dans lequel les positions des points A, B, C, sont quelconques, peut être ramené au cas particulier et plus simple dans lequel ces trois points sont en ligne droite, de la manière suivante.

Soit décrite la circonférence de cercle qui passe par le point P, et par deux des trois points donnés tels que A et B.

Pour que le problème soit déterminé, cette circonférence ne doit pas passer par le point C; que cette circonférence rencontre AC en c. Soient menées Pc et Bc.

Dans

Dans le triangle BAC l'angle A est donné, et l'angle c est égal à l'angle donné APB$=\gamma$; donc ce triangle est donné d'espèce; et en particulier le rapport de AB à Ac est donné; mais AB est donnée de grandeur, donc Ac est donnée de grandeur. De plus, l'angle BPc est égal à l'angle A, et l'angle CPc est la différence de l'angle A et de l'angle BPC ou α. Partant, les points A, C, c, sont donnés de position sur une même droite, et les angles APC, CPc, ou APc sont donnés; donc le cas d'une position quelconque des trois points donnés est ramené au cas où les trois points donnés sont en ligne droite.

Remarque 4.° Puisque dans le triangle APC le rapport des côtés AP, PC, est donné; les angles PAC, PCA, sont aussi donnés; par exemple, par les proportions (tirées de la trigonométrie)

$$AP:PC=\text{cosec. APC}:\text{cot. APC}+\text{cot. PCA}$$

$$PC:AP=\text{cosec. APC}:\text{cot. APC}+\text{cot. PAC}.$$

Scholie. Le problème qui fait l'objet de ce § est remarquable par son utilité et par ses applications à la géodesie. En effet, les positions de trois points étant données, on détermine la position d'un quatrième point relativement à eux, en observant les angles sous lesquels depuis ce quatrième point on voit leurs distances. Il faut remarquer que les solutions précédentes reposent essentiellement sur la supposition que ces quatre points sont sur un même plan; autrement le problème surpasse la portée des élémens.

Parmi les belles applications du problème qui vient de nous occuper, je citerai celle qu'a faite l'ingénieux LAMBERT (*), en mettant en équation et en résolvant, par son moyen, la question suivante. Soient deux systèmes de points composés chacun de quatre points; les points d'un des systèmes sont accessibles, mais invisibles les uns à l'égard des autres; les points de l'autre système sont inaccessibles, mais ils sont visibles depuis chacun des points du premier système. Depuis chacun des points du premier système on observe les angles sous lesquels on voit les distances des points du second système. D'après ces observations, on peut déterminer les distances respectives de ces huit points entr'eux.

Après avoir exposé différens procédés tirés de la géométrie pour la solution du problème proposé, je vais esquisser les procédés que fournit l'algèbre.

Le procédé qui paroît se présenter à l'esprit le plus naturellement, consiste à prendre pour inconnues les trois distances PA, PB, PC; lesquelles soient désignées par x, y, z, respectivement. Que les côtés AB, BC, CA, soient dési-

(*) *Beyträge zu reinen und angewandten mathematik.*

gnés par c, a, b, respectivement; et que les angles opposés à ces côtés soient désignés par C, A, B, respectivement; on a les trois équations,

$$xx - 2xy\cos.\gamma + yy = cc$$
$$xx - 2xz\cos.C + zz = bb$$
$$yy - 2yz\cos.\alpha + zz = aa.$$

Des deux premières équations on tire les valeurs de x en y et en z.

$$x = y\cos.\gamma + \sqrt{(cc - yy\sin.^2\gamma)}$$
$$x = z\cos.C + \sqrt{(bb - zz\sin.^2C)}.$$

De là, $y\cos.\gamma - z\cos.C = \sqrt{(bb - zz\sin.^2C)} - \sqrt{(cc - yy\sin.^2\gamma)}$.

$$yy - 2yz\cos.\gamma\cos.C + zz = bb + cc - 2\sqrt{((bb - zz\sin.^2C)(cc - yy\sin.^2\gamma))}.$$

Or, $yy - 2yz\cos.\alpha + zz = aa$; et $\alpha = C - \gamma$;

Donc, $2yz\sin.C\sin.\gamma = bb + cc - aa - 2\sqrt{((bb - zz\sin.^2C)(cc - yy\sin.^2\gamma))}$.

$$= 2bc\cos.A - 2\sqrt{((bb - zz\sin.^2C)(cc - yy\sin.^2\gamma))}.$$

$$bc\cos.A - yz\sin.C\sin.\gamma = \sqrt{((bb - zz\sin.^2C)(cc - yy\sin.^2\gamma))}.$$

$$bb\,cc\cos.^2A - 2bcyz\sin.C\sin.\gamma\cos.A = bb\,cc - bb\,yy\sin.^2\gamma - cc\,zz\sin.^2C$$

$$bb\,yy\sin.^2\gamma - 2bcyz\sin.C\sin.\gamma\cos.A + cc\,zz\sin.^2C = bb\,cc\sin.^2A.$$

De cette équation, combinée avec l'équation $yy - 2yz\cos.\alpha + zz = aa$; on tire une équation à une des inconnues seulement, laquelle devient une équation bicarrée.

La longueur de ce procédé (sur-tout quand on le compare avec quelqu'un des procédés géométriques) ne permet pas de l'envisager autrement que comme un exercice de calcul, qui peut occuper utilement les élèves, sur-tout lorsqu'ils en poursuivront les résultats, pour montrer leur accord avec ceux que donnent les solutions géométriques.

J'en dis autant du procédé fondé sur la doctrine des coordonnées.

Soient a et b, a′ et b′, a″ et b″; les coordonnées des trois points donnés; soient x et y les coordonnées du point cherché.

Les tangentes des angles que les droites menées du point xy aux points ab, a′b′, a″b″, font avec l'axe des x, sont respectivement $\frac{b-y}{a-x}$, $\frac{b'-y}{a'-y}$, $\frac{b''-y}{a''-x}$.

Les tangentes des angles que l'une de ces droites, par exemple la première, fait avec les deux autres, sont respectivement

$$\frac{\frac{b-y}{a-x}-\frac{b'-y}{a'-x}}{1+\frac{b-y}{a-x}\times\frac{b'-y}{a'-x}}=\frac{(b-y)(a'-x)-(b'-y)(a-x)}{(a-x)(a'-x)+(b-y)(b'-y)}=\frac{a'b-ab'-y(a'-a)+x(b'-b)}{(a-x)(a'-x)+(b-y)(b'-y)};$$

$$\frac{\frac{b-y}{a-x}-\frac{b''-y}{a''-x}}{1+\frac{b-y}{a-x}\times\frac{b''-y}{a''-x}}=\frac{(b-y)(a''-x)-(b''-y)(a-x)}{(a-x)(a''-x)+(b-y)(b''-y)}=\frac{a''b-ab''-y(a''-a)+x(b''-b)}{(a-x)(a''-x)+(b-y)(b''-y)}.$$

Soient égalées ces deux expressions aux tangentes des angles donnés ; on obtient deux équations à deux inconnues, l'une et l'autre du second degré ; de la combinaison desquelles on obtient une équation du second degré, pour déterminer l'une des inconnues.

Le procédé suivant me paroît le plus simple des procédés algébriques, pour résoudre la question proposée.

Soit l'angle PBC=x ; PBA=B-x ; PAB=2D-(B-x+γ) ; PCB=2D-(x+α).

AB : PB=sin. APB : sin. PAB=sin. γ : sin. (B-x+γ)

PB : BC=sin. PCB : sin. BPC=sin. (x+α) : sin. α

AB : BC $=\sin.\gamma\sin.(x+\alpha):\sin.\alpha\sin.(B-x+\gamma)$

ou, AB sin. α : BC sin. γ $=\sin.(x+\alpha):\sin.(B-x+\gamma)$.

$$AB\sin.\alpha+BC\sin.\gamma : AB\sin.\alpha-BC\sin.\gamma=\text{tang.}\frac{B+\gamma+\alpha}{2}:\text{tang.}(x-\frac{B+\gamma-\alpha}{2}).$$

De là, on obtient tang. $(x-\frac{B+\gamma-\alpha}{2})$; et partant aussi l'angle x.

On peut aussi déterminer immédiatement l'angle x par la proportion

AB sin. α : BC sin. γ = cos. α + sin. α cot. x : sin. (B+γ) cot. x - cos. (B+γ)

ou, AB sin. (B+γ) : BC sin. γ = cot. α + cot. x : cot. x - cot. (B+γ)

$$\text{De là, cot. } x=\frac{AB\cos.(B+\gamma)+BC\sin.\gamma\cot.\alpha}{AB\sin.(B+\gamma)-BC\sin.\gamma}$$

$$\text{cosec.}^2 x=\frac{AB^2-2AB\times BC\sin.\gamma\cos.(B+\gamma-\alpha)\,\text{cosec.}\,\alpha+BC^2\sin.^2\gamma\,\text{cosec.}^2\alpha}{(AB\sin.(B+\gamma)-BC\sin.\gamma)^2}$$

$$\sin.^2 x=\frac{(AB\sin.(B+\gamma)-BC\sin.\gamma)^2}{AB^2-2AB\times BC\sin.\gamma\cos.(B+\gamma-\alpha)\,\text{cosec.}\,\alpha+BC^2\sin.^2\gamma\,\text{cosec.}^2\alpha}$$

$$BC^2\sin.^2 x=PC^2\times\sin.^2\alpha$$

$$PC^2=BC^2\times\frac{(AB\sin.(B+\gamma)-BC\sin.\gamma)^2}{AB^2\sin.^2\alpha-2AB\times BC\sin.\alpha\sin.\gamma\cos.(B+\gamma-\alpha)+BC^2\sin.^2\gamma}.$$

On obtient de même chacune des deux autres distances PA, PB.

Lorsque les deux termes de la fraction $\frac{AB\cos.(B+\gamma)+BC\sin.\gamma\cot.\alpha}{AB\sin.(B+\gamma)-BC\sin.\gamma}$ évanouissent en même tems, la cotangente de l'angle PBC est indéterminée, et partant, la question elle-même est indéterminée ; on a alors

$AB:BC=\sin.\gamma\cot.\alpha:\cos.(2D-(B+\gamma))=\sin.\gamma:\sin.(B+\gamma)$

ou, $\cot.\alpha=\cot.(2D-(B+\gamma))$

$\alpha=2D-(B+\gamma)$; $2D=B+\alpha+\gamma=B+C=B+APC$. Partant, le quadrilatère APCB est inscriptible au cercle.

§. 139.

Problème. A un triangle donné circonscrire un triangle donné de grandeur et d'espèce ; et à un triangle donné inscrire un triangle donné de grandeur et d'espèce.

Lemme premier. Soient trois points donnés de position, mener par l'un d'eutr'eux une droite sur laquelle abaissant des perpendiculaires depuis les deux autres, leur distance soit donnée.

Fig. 88. Soient A et A′ deux points donnés de position, et soit B un autre point donné de position. Mener par B une droite sur laquelle abaissant les perpendiculaires AP, A′P′, la droite PP′ soit donnée de grandeur.

Analyse. Par A′ soit conçue menée à PP′ une parallèle qui rencontre AP en p. Dans le triangle rectangle AA′p, on connoît l'hypothénuse AA′ et le côté A′p=PP′ ; donc, ce triangle est déterminé, et en particulier la droite A′p est donnée de position ; donc aussi, la parallèle PP′ menée par B est donnée de position.

Construction. D'un des points donnés tel que A′ comme centre, avec un rayon égal à la droite donnée de grandeur, soit décrit un cercle. De l'autre point A soit menée à ce cercle une tangente Ap, soit mené le rayon A′p au point de contact, et du point B soit mené au rayon A′p une parallèle ; elle sera la droite cherchée.

Démonstration. Elle découle de l'analyse.

Limite. La plus grande valeur de la droite donnée de grandeur est la droite AA′ ; alors, la droite cherchée est parallèle à AA′.

Remarque 1.re Lorsque la droite l donnée de grandeur est plus petite que AA′ on peut mener du point A (extérieur au cercle dont le centre est A′ et le rayon l) deux tangentes ; et partant, le problème proposé a deux solutions.

Remarque

Remarque 2.° Soient menées AB et A'B'; le triangle ABA' est déterminé par ses côtés, et en particulier l'angle ABA' est donné. Donc aussi, la somme des angles ABP, A'BP' est donnée. Mais les droites BP et BP' sont respectivement les cosinus des angles ABP et A'BP' pour les rayons AB et A'B: donc le problème proposé est le même que le suivant. Partager un angle donné ϕ en deux parties, en connoissant la somme s de leurs cosinus rapportés à des rayons donnés a et a'. On a donc à résoudre l'équation $a\cos. x + a'\cos.(\phi - x) = s$; de laquelle on obtient

$$\cos. x = \frac{s(a + a'\cos.\phi) \mp a'\sin.\phi\sqrt{(aa + 2aa'\cos.\phi + a'a' - ss)}}{aa + 2aa'\cos.\phi + a'a'}$$

$$\cos.\phi - x = \frac{s(a' + a\cos.\phi) \mp a\sin.\phi\sqrt{(aa + 2aa'\cos.\phi + a'a' - ss)}}{aa + 2aa'\cos.\phi + a'a'}.$$

Lemme second. Soient deux cercles qui se coupent donnés de grandeur et de position. Mener par l'un de leurs points de section une droite, dont la partie comprise entre les circonférences de ces cercles soit égale à une droite 2l donnée de grandeur.

Soient C et C' les centres de deux cercles donnés qui se rencontrent en un point A. Mener par A une droite XX', terminée aux circonférences de ces cercles en X et en X' de manière que la droite XX' soit égale à la droite 2l donnée de grandeur. Fig. 89.

Analyse. Soient CP et C'P' perpendiculaires à XX'; AX=2AP; AX'=2AP'; XX'=2PP'; donc, PP'=l. Partant, les points C et C' étant donnés de position, et le point A étant aussi donné de position, on doit mener par A la droite PP' sur laquelle abaissant les perpendiculaires CP et C'P', la droite PP' soit égale à la droite l donnée de grandeur.

Limite. La plus grande valeur de XX' ou 2l est d'être double de CC'; et dans la limite la droite XX' est parallèle à CC' ou perpendiculaire à la droite AA' qui joint les points de section des deux cercles.

Remarque. Lorsque les points X et X' sont situés des deux côtés de la droite AA'; la droite XX' est la somme des droites AX et AX'; et elle est leur différence lorsque ces points sont situés d'un même côté de AA'.

Application au problème proposé. Soit ABA' un triangle donné de grandeur et d'espèce, auquel on doit circonscrire un triangle XZX' donné aussi de grandeur et d'espèce.

Analyse. Puisque les angles X et X' sont donnés, les lieux des points X et X' sont les circonférences des segmens de cercle décrits sur AB et A'B comme Fig. 90.

cordes, et capables des angles donnés X et X′; et puisque la droite XX′ est donnée de grandeur, le problème proposé est réduit au lemme second.

Construction. Sur les droites AB et A′B comme cordes soient décrits des segmens de cercle respectivement capables des angles du triangle qui doivent être opposés aux côtés AB et A′B. Puis soit menée par B une droite XX′ dont la partie comprise entre les circonférences de ces cercles soit égale au côté donné du triangle compris entre ces angles.

Démonstration. Elle découle de l'analyse.

Limite. La plus grande valeur du côté XX′ a lieu lorsque XX′ est parallèle à CC′ et alors XX′ est double de CC′.

1.° Que les angles X et X′ soient l'un et l'autre aigus.

$$CBA = 1\,Dr - X$$

$$C'BA' = 1\,Dr - X'$$

$$CBC' = 2\,Dr - (X + X' - ABA')$$

Soit $CB = \frac{1}{2} AB \operatorname{cosec.} X = R$

$$C'B = \frac{1}{2} A'B \operatorname{cosec.} X' = R'$$

$CC'^2 = RR + 2RR' \cos.(X + X' - ABA') + R'R'$; partant, la plus grande valeur du côté XX′ est $2\sqrt{(RR + 2RR' \cos.(X + X' - ABA') + R'R')}$.

Le même maximum a lieu lorsque l'un des angles X et X′, tel que X′ est obtus.

Remarque. On résout en particulier le cas dans lequel les points A, B, A′ sont en ligne droite, de manière que les côtés ZX, ZX′, XX′, du triangle demandé doivent passer par les points A, A′, B, donnés de position sur la droite AA′.

Réciproquement. Le triangle XZX′ étant proposé on peut lui inscrire un triangle ABA′ donné de grandeur et d'espèce. En particulier, le triangle XZX′ étant proposé, on peut mener une droite dont les parties comprises entre ses côtés soient respectivement égales à des droites données de grandeur. Pour cela, on résoudra le problème inverse et on copiera la figure obtenue.

Procédé algébrique. Lemme. Trouver deux angles dont on connoît la somme (ou la différence), et la somme p (ou la différence) des produits de leurs sinus par les nombres donnés m et n.

Equation, $m \sin. x + n \sin.(s - x) = p$.

De là, $$\cos. x = \frac{np \sin. s \pm (m - n \cos. s)\sqrt{(mm - 2mn \cos. s + nn - pp)}}{mm - 2mn \cos. s + nn}$$

$$\sin. x = \frac{p(m - n \cos. s) \mp n \sin. s \sqrt{(mm - 2mn \cos. s + nn - pp)}}{mm - 2mn \cos. s + nn}$$

Digitized by Google

Remarque. Pour que le problème soit possible, on doit avoir $pp \leqq mm - 2mn \cos. s + nn$; et partant, la plus grande valeur de pp est $mm - 2mn \cos. s + nn$.

Application. Soit l'angle $ABA' = \mathcal{C}$; soient les angles X et X', γ et γ' respectivement. Soient aussi AB et A'B, a et a' respectivement.

Soit $ABX = x$; $A'BX' = 2D - (x + \mathcal{C})$. $BAX = 2D - (\gamma + x)$; $BA'X' = x + \mathcal{C} - \gamma'$.

$$BX = a \times \frac{\sin.(\gamma + x)}{\sin.\gamma}; \quad BX' = a' \times \frac{\sin.(x + \mathcal{C} - \gamma')}{\sin.\gamma'}.$$

$$xx' = a \times \frac{\sin.(\gamma + x)}{\sin.\gamma} + a' \frac{\sin.(x + \mathcal{C} - \gamma')}{\sin.\gamma'}.$$

Partant, on connoît la différence $\gamma + \gamma' - \mathcal{C}$ des angles $\gamma + x$ et $x + \mathcal{C} - \gamma'$; et la somme des produits de leurs sinus par les quantités données $\frac{a}{\sin.\gamma}$, $\frac{a'}{\sin.\gamma'}$, ou a cosec. γ, a' cosec. γ'. Donc, le problème proposé est réduit au lemme.

§ 140.

Problème. Soient donnés les quatre côtés d'un quadrilatère inscriptible au cercle; déterminer ce quadrilatère.

Soit AB un des côtés pris pour base d'un quadrilatère ABXY inscriptible au cercle; déterminer ce quadrilatère. FIG. 91.

Analyse. Soit menée la diagonale AX, et soit la base AB prolongée indéfiniment en E. Puisque le quadrilatère proposé doit être inscrit au cercle, les angles AYX, XBE, sont égaux entr'eux; et comme les côtés AY, YX, XB, sont connus, si on prend à ces côtés une quatrième proportionnelle BE, et si on mène XE, les triangles AYX, XBE, sont semblables; et partant, le rapport de AX à EX est égal au rapport donné de AY à BX; donc, le point X est à la circonférence d'un cercle donné (§ 45); mais la droite BX étant donnée de grandeur, le point X est aussi à une circonférence donnée dont B est le centre et BX le rayon; donc, le point X est donné.

Construction. Soit AB un des côtés donnés du quadrilatère. Aux trois côtés restans AY, XY, BX soit prise une quatrième proportionnelle BE, laquelle soit portée sur le prolongement de AB de B en E. Soit cherché le lieu des points dont le rapport des distances aux points A et E est égal au rapport du premier au troisième des côtés qui sont les trois premiers termes de cette proportion; du point B avec un rayon égal au troisième de ces côtés soit décrite une circonférence de cercle qui rencontre en X la circonférence qui est le lieu de ces points. Puis sur AX comme base soit décrit un triangle dont les côtés AY, XY

soient les deux premiers côtés donnés. Le quadrilatère ABXY est le quadrilatère cherché. Ce qui se réduit à montrer que les angles AYX, XBE sont égaux entr'eux.

Démonstration. Par construction, AY:XY=BX:BE; donc, les triangles AYX, XBE ont leurs trois côtés proportionnels, donc, ils sont équiangles, et en particulier les angles AYX, XBE sont égaux entr'eux.

Je passe à l'application du calcul à la construction.

Soit déterminé le centre C du cercle qui est le lieu des points X, en tant que AX:EX=AY:BX; et le rayon CX de ce cercle; dans le triangle CBX, dont on connoît les trois côtés, on pourra déterminer l'angle XBC par quelqu'une des formules trigonométriques.

En envisageant la détermination de l'angle B sous un point de vue purement algébrique, le procédé le plus simple me paroît être de l'estimer par l'équation

$$\begin{aligned} &AB^2+BX^2-2AB\times BX\cos.ABX \\ &=AY^2+XY^2-2AY\times YX\cos.AYX \\ &=AY^2+XY^2+2AY\times YX\cos.ABX \end{aligned}$$

D'où l'on tire $\cos.ABX=\frac{AB^2+BX^2-AY^2-XY^2}{2AB\times BX+2AY\times XY}$

Soient AB=a, BX=b, XY=c, AY=d.

$$\cos.ABX=\frac{aa+bb-cc-dd}{2ab+2cd},$$

$$1+\cos.ABX=2\cos.^2\tfrac{1}{2}ABX=\frac{(a+b-c+d)\,(a+b+c-d)}{2\,(ab+cd)}$$

$$1-\cos.ABX=2\sin.^2\tfrac{1}{2}ABX=\frac{(a-b+c+d)\,(-a+b+c+d)}{2(ab+cd)}$$

$$\tang.^2\tfrac{1}{2}ABX=\frac{(a-b+c+d)\,(-a+b+c+d)}{(a+b-c+d)\,(a+b+c-d)}.$$

$$\sin.ABX=\frac{2\sqrt{\left(\frac{a+b+c-d}{2}\times\frac{a+b-c+d}{2}\times\frac{a-b+c+d}{2}\times\frac{-a+b+c+d}{2}\right)}}{ab+cd}$$

$$ABXY=\sqrt{\left(\frac{a+b+c-d}{2}\times\frac{a+b-c+d}{2}\times\frac{a-b+c+d}{2}\times\frac{-a+b+c+d}{2}\right)}.$$

Savoir, la surface d'un quadrilatère inscrit à un cercle est exprimée par la racine carrée du produit continuel des quatre excès de son demi-contour sur chacun de ses côtés.

On

On peut aussi calculer une des diagonales telle que AX, par l'équation,

$$AX^2 = AB^2 + BX^2 - 2AB \times BX \text{ cos. } ABX.$$

$$= aa + bb - 2ab \times \frac{aa + bb - cc - dd}{2ab + 2cd}$$

$$= \frac{(aa+bb)\,2cd + (cc+dd)\,2ab}{2ab+2cd} = \frac{(aa+bb)\,cd + (cc+dd)\,ab}{ab+cd}.$$

$$= (ac+bd) \times \frac{ad+bc}{ab+cd}.$$

De même, $BY^2 = (ac+bd) \times \frac{ab+cd}{ad+bc}$.

De là, $AX : BY = ad+bc : ab+cd$

$AX \times BY = ac+bd$; ainsi qu'il est connu par les Elémens de géométrie (Voyez la Géométrie de Le Gendre, liv. III).

Réciproquement. Ces deux derniers théorèmes étant admis, on auroit pu en tirer les valeurs des deux diagonales.

En effet, puisque $AX : BY = ad+bc : ab+cd = AX^2 : AX \times BY$

$$= AX \times BY : BY^2.$$
$$= AX^2 : ab+bd$$
$$= ac+bd : BY^2$$

$$AX^2 = (ac+bd) \times \frac{ad+bc}{ab+cd}$$

$$BY^2 = (ac+bd) \times \frac{ab+cd}{ad+bc}$$

$$\text{cos. } ABX = \frac{AB^2 + BX^2 - AX^2}{2AB \times BX} = \frac{aa+bb-(ac+bd)\frac{ad+bc}{ab+cd}}{2ab} = \frac{aa+bb-cc-dd}{2(ab+cd)}.$$

Remarque. Quoique la théorie des coordonnées soit très-générale, il me paroît que son application dans ce cas particulier devient trop compliquée pour qu'il convienne de la suivre. Qu'il me suffise de tracer la marche de cette application.

Soit un des côtés AB pris pour base du quadrilatère, donné de grandeur et de position; soient a et b, a′ et b′, les coordonnées de ses extrémités A et B; soient x et y, x′ et y′ les coordonnées des sommets restans x et y.

Soient déterminés dans les coordonnées des sommets A, B, X, Y, les angles X et A par exemple; et soit égalé l'un de ces angles au supplément de l'autre. Soient aussi prises les expressions des carrés des droites BX, XY, YA, dans les coordonnées de leurs extrémités; on aura quatre inconnues, et quatre

équations pour les déterminer ; mais, la marche devient si longue relativement aux procédés précédens, qu'elle me paroît inapplicable.

§ 141.

Problème. On demande un quadrilatère dont on connoît les quatre côtés et la surface.

Fig. 92. Soit ABXY un quadrilatère dont on connoît les quatre côtés AB, BX, XY, YA, et la surface, on demande ce quadrilatère.

Que l'un des côtés donnés AB soit pris pour base du quadrilatère demandé. D'un des sommets opposés à ce côté tel que X soient abaissées sur les côtés AB, AY, les perpendiculaires XZ, XV.

$$AX^2 = AB^2 + BX^2 - 2AB \times BZ$$
$$= AY^2 + XY^2 + 2AY \times VY;$$

Soit $AB^2 + BX^2 - AY^2 - XY^2 = 2AB \times BD$; $2AB \times DZ = 2AY \times VY$; et $AB : AY = VY : DZ$.

Le double de la surface donnée du quadrilatère a pour expression $AB \times XZ + AY \times VX$; soit cette somme égale au rectangle de AB par une droite DE qui sera donnée de grandeur, laquelle soit élevée perpendiculairement à AB depuis le point D ; soit XR perpendiculaire à DE, et soit menée EX.

Puisque $AB \times XZ + AY \times VX = AB \times DE$;

$$AY \times VX = AB \times ER$$

Donc, $AB : AY = VX : ER = VY : DZ = VY : XR$.

De là, les triangles rectangles EXR, XYV sont semblables, et en particulier $XY : EX = AB : AY$; donc, la droite EX est donnée de grandeur ; donc le point X est à l'intersection de deux cercles donnés dont B et E sont les centres et dont BX et EX sont les rayons ; donc, ce point est déterminé.

Construction. Soit changée la différence $AB^2 + BX^2 - XY^2 - AY^2$ en un rectangle ayant 2AB par un de ses côtés ; soit BD l'autre côté. Du point D soit élevée à AB une perpendiculaire indéfinie, et soit changé le double de la surface donnée en un rectangle ayant AB pour un de ses côtés et pour l'autre côté une droite DE, laquelle soit portée depuis le point D sur la perpendiculaire à AB. Aux côtés AB, AY et XY soit trouvée une quatrième proportionnelle L ; sur EB comme base soit décrit (s'il est possible) un triangle ayant pour côtés le quatrième côté BX et la droite donnée L=EX. Soit achevé le quadrilatère ABXY dont AY et XY sont les côtés restans ; il sera le quadrilatère demandé.

La *démonstration* découle de l'analyse.

En effet (par construction); $AB^2+BX^2-AY^2-XY^2=2AB\times BD$;
mais, $AB^2+BX^2-AY^2-XY^2=2AB\times BZ+2AY\times VY$; donc,
$2AB\times DZ=2AY\times VY$; et $AB:AY=VY:DZ=VY:XR$.

Or, $AB:AY=XY:EX$ (construction); donc, $VY:XR=XY:EX$; donc, les triangles rectangles EXR, XYV sont semblables; et en particulier $ER:VX=EX:XY=AY:AB$; donc, $AB\times ER=AY\times VX$,
et $AB\times ED=AY\times VX+AB\times XZ$; donc, le double de la surface du quadrilatère est bien égal au rectangle donné $AB\times ED$.

En particulier, on peut circonscrire à un cercle donné un quadrilatère dont les quatre côtés sont donnés de grandeur, de manière que les sommes des côtés opposés soient égales entr'elles. En effet, le double de la surface d'un polygone (et en particulier d'un quadrilatère) circonscrit au cercle, est égal au rectangle de son contour par le rayon de ce cercle.

Limite. Pour que le problème soit possible, la droite EB ne doit pas être plus grande que la somme de BX et de EX; et partant, les quatre côtés étant donnés, la plus grande valeur de ED, et aussi la plus grande valeur de la surface, a lieu lorsque les trois points B, X, E, sont en ligne droite; alors, l'angle EXR est égal à l'angle B; mais l'angle EXR est toujours égal à l'angle XYV, donc, dans le cas du maximum de surface les angles B et XYV sont égaux entr'eux, et partant, le quadrilatère est inscriptible au cercle, ainsi qu'il est connu.

Remarque. D'après cette construction, on peut déterminer les angles et la surface du quadrilatère inscriptible au cercle fait avec quatre côtés donnés.

En effet, $\cos. B=\frac{BD}{BE}=\frac{BD}{BX+EX}=\frac{2BD\times AB}{2BX\times AB+2AB\times EX}$
$=\frac{AB^2+BX^2-AY^2-XY^2}{2AB\times BX+2AY\times YX}$; conformément au § précédent.

Pour abréger, que les côtés AB, BX, XY, YA, soient désignés par a, b, c, d, respectivement.

$$DE^2=BE^2-BD^2=(BE+BD)(BE-BD)$$
$$=(b+\frac{cd}{a}+\frac{aa+bb-cc-dd}{2a})(b+\frac{cd}{a}-\frac{aa+bb-cc-dd}{2a})$$
$$=\frac{(a+b)^2-(c-d)^2}{2a}\times\frac{(c+d)^2-(a-b)^2}{2a}$$
$$=\frac{(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d)}{4aa}$$

De là, la surface est $\sqrt{(\frac{a+b+c-d}{2}\times\frac{a+b-c+d}{2}\times\frac{a-b+c+d}{2}\times\frac{-a+b+c+d}{2})}$.

En particulier, que le quadrilatère soit en même tems circonscriptible au cercle; et partant, que les sommes des côtés opposés soient égales entr'elles; sa surface, dans ce cas, est $\sqrt{abcd}$, ou égale à la racine du produit continuel de ses côtés, et le rayon du cercle qui lui est inscrit est alors $\frac{\sqrt{abcd}}{a+c}=\sqrt{\frac{ac}{a+c}}\times\sqrt{\frac{bd}{b+d}}$; savoir, soient prises des quatrièmes proportionnelles à la somme des côtés opposés et à chacun d'eux; le rayon du plus grand cercle inscrit au quadrilatère proposé est moyen géométrique entre ces deux quatrièmes proportionnelles.

Procédé algébrique. Lemme 1.er Déterminer un angle en connoissant la somme s des produits de son sinus et de son cosinus par les nombres donnés α et $\mathfrak{C}$.

De l'équation, $\alpha \sin. x+\mathfrak{C}\cos. x=s$; on tire

$$\cos. x=\frac{\mathfrak{C}s\mp\alpha\sqrt{(\alpha\alpha+\mathfrak{C}\mathfrak{C}-ss)}}{\alpha\alpha+\mathfrak{C}\mathfrak{C}}.$$

$$\sin. x=\frac{\alpha s\pm\mathfrak{C}\sqrt{(\alpha\alpha+\mathfrak{C}\mathfrak{C}-ss)}}{\alpha\alpha+\mathfrak{C}\mathfrak{C}}.$$

Lemme 2.e Trouver deux angles en connoissant la somme s des produits de leurs sinus par les nombres donnés m et n; et aussi la somme s des produits de leurs cosinus par les mêmes nombres donnés m et n (1).

On a les deux équations $m \sin. x+n \sin. y=s$

$$m \cos. x+n \cos. y=c,$$

ou, $\begin{matrix} m \sin. x=s-n \sin. y \\ m \cos. x=c-n\cos. y \end{matrix}$; soient carrés les membres de ces équations; soient prises les sommes des membres correspondans, et soit substituée l'unité à chacune des sommes $\sin.^2 x+\cos.^2 x$, $\sin.^2 y+\cos.^2 y$; on obtient $mm=ss+cc-2ns \sin. y-2nc\cos. y+nn$; ou, $2ns\sin. y+2nc\cos. y=ss+cc-mm+nn$. Donc, ce second lemme est réduit au premier, on trouve

$$\sin. y=\frac{s(ss+cc-mm+nn)\pm c\sqrt{((ss+cc-(m-n)^2)(m+n)^2-(ss+cc))}}{2n(ss+cc)}$$

$$\cos. y=\frac{c(ss+cc-mm+nn)\mp s\sqrt{((ss+cc)-(m-n)^2)(m+n)^2-(ss+cc))}}{2n(ss+cc)}$$

Application. On demande un quadrilatère dont on connoît les quatre côtés et la surface.

Soient les côtés donnés a, b, c, d; et soit s la surface.

---

[1] L'expression *somme* se prend dans un sens général qui comprend aussi les différences.

Soient

Soient x et y les angles opposés compris l'un entre les côtés a et b, et l'autre entre les côtés c et d. La double expression de la diagonale opposée à ces côtés donne l'équation $aa+bb-2ab\cos. x=cc+dd-2cd\cos. y$;
ou, $2ab\cos. x-2cd\cos. y=aa+bb-(cc+dd)$. On a aussi $2ab\sin. x+2cd\sin. y=4S$.

Partant, le problème proposé est réduit au lemme.

Application du problème proposé. On demande un quadrilatère dont on connoît les côtés, et l'angle sous lequel se coupent les diagonales.

Lemme 1.er Dans tout quadrilatère, l'excès de la somme des carrés de deux des côtés opposés sur la somme des carrés des deux autres côtés, est double du rectangle des deux diagonales par le cosinus de leur inclinaison. FIG. 93.

Soit ABCD un quadrilatère dont les diagonales AC, BD, se coupent en S. J'affirme que $AD^2+BC^2-(AB^2+CD^2)=2AC\times BD\cos. S$.

Soient Aa, Cc, perpendiculaires à BD.

$$AD^2=AS^2+SD^2+2AS\times SD\cos. S$$
$$BC^2=BS^2+SC^2+2BS\times SC\cos. S.$$
$$AB^2=AS^2+BS^2-2AS\times SB\cos. S$$
$$CD^2=CS^2+SD^2-2CS\times SD\cos. S;$$

donc $(AD^2+BC^2)-(AB^2+CD^2)=2AS\times BD\cos. S+2CS\times BD\cos. S=2AC\times BD\cos. S$.

Lemme 2^d^. Le double de la surface d'un quadrilatère est égal au rectangle de ses diagonales par le sinus de l'angle qu'elles comprennent.

En effet, $2ABD=BD\times AS\sin. S$
$$2BCD=BD\times CS\sin. S$$
donc, $2ACBD=BD\times AC\sin. S$.

Corollaire. Quand on connoît les côtés d'un quadrilatère et l'inclinaison de ses diagonales, on connoît le rectangle des diagonales, et, partant, le rectangle des diagonales par le sinus de leur inclinaison, ou le double de la surface. Et réciproquement, la connoissance des côtés et de la surface détermine le rectangle des diagonales et leur inclinaison.

Remarque. Lorsque l'angle S est droit, $AD^2+BC^2-(AB^2+BC^2)=0$; $BD\times AC$ est quelconque, et la question est indéterminée.

Autre problème, proposé comme exercice. Déterminer l'espèce d'un quadrilatère dont on connoît les angles et l'angle formé par les diagonales. De là, déterminer un quadrilatère lorsqu'à ces connoissances on en ajoute quelqu'autre indépendante des angles; par exemple, celle d'un côté, d'une diagonale, du contour, de la surface.

§ 142.

Problème. On demande un quadrilatère dont on connoît les angles et les diagonales.

Je vais ramener cette question à la suivante. On demande un quadrilatère dont on connoît un des côtés, les angles et le rapport des diagonales.

FIG. 92. Soit ABXY un quadrilatère dont le côté AB est donné de grandeur et de position, dont les angles sont donnés, et dont le rapport des diagonales AX et BY est aussi donné. On demande ce quadrilatère.

Premier cas. Que les angles opposés donnés de grandeur soient supplémens l'un de l'autre. Le quadrilatère proposé est inscriptible au cercle; le rapport de ses diagonales est déterminé dans les angles donnés, savoir; ce rapport est celui des sinus des angles opposés à ces diagonales; partant, la question proposée est indéterminée, et le problème proposé donne lieu à un porisme.

Second cas. Que les angles opposés A et X ne soient pas supplémens l'un de l'autre.

Du point B soit menée la droite BA′ qui rencontre AY en A′ de manière que les angles A′ et X soient supplémens l'un de l'autre. Dans le quadrilatère inscriptible au cercle A′BXY le rapport des diagonales A′X et BY est connu (premier cas); mais le rapport de BY à AX est supposé connu; donc, le rapport de A′X à AX est aussi connu.

1.° Soit le rapport connu de A′X à AX le rapport d'égalité; le point X est à une droite donnée de position perpendiculaire à AA′ et élevée depuis son milieu; mais il est aussi à la droite BX donnée de position; donc, le point X est connu.

Dans ce cas, la question proposée est impossible, lorsque la droite BX est perpendiculaire à AA′ ou AY; c'est-à-dire lorsque la somme des angles donnés A et B vaut un droit.

2.° Soit le rapport donné de A′X à AX un rapport d'inégalité. Le point X est à la circonférence d'un cercle donné (§ 45); mais il est aussi à la droite BX donnée de position; donc, le point X est donné.

Construction. Du point B soit menée la droite BA′ qui rencontre AY en A′ sous un angle A′, supplément de l'angle X. Sur une même droite SC, soient faits des angles CSM, CSN, respectivement égaux aux angles donnés X et Y. Sur les secondes jambes de ces angles soient prises les droites SM, SN, qui soient entr'elles dans le rapport donné des diagonales AX et BY, et soient Mm et Nn perpendiculaires à SC.

Digitized by Google

1.° Soit Mm = Nn. Du milieu de AA' soit élevée à AA' une perpendiculaire, qui rencontre (s'il est possible) le côté BX en X; le point X est le sommet cherché du quadrilatère demandé, situé sur BX. Pour que l'intersection ait lieu, la somme des angles donnés A et B ne doit pas valoir un droit.

2.° Soit Mm non égale à Nn. Soit décrite la circonférence du cercle qui est le lieu des points desquels menant des droites aux points A et A' leur rapport soit égal à celui de Mm à Nn. Que cette circonférence rencontre (s'il est possible) la droite BX en X, le point X est le sommet cherché du quadrilatère situé sur BX.

Démonstration. Par construction, $AX : A'X = SM \sin. X : SN \sin. Y$

mais, $A'X : BY = \sin. Y : \sin. X$

donc, $AX : BY = SM : SN$

Limite. En supposant Mm non égale à Nn; pour que le problème soit possible, la circonférence qui est le lieu des points dont le rapport des distances aux points donnés A et A' est celui de SM sin. X à SN sin. Y, doit rencontrer la droite BX; et partant, la droite BX doit être sécante à cette circonférence ou tangente à elle. Les angles X et Y restant les mêmes, et le rapport des diagonales AX, BY, restant aussi le même; la plus grande valeur de l'angle A'BX, et partant aussi de l'angle ABX a lieu, lorsque la droite BX est tangente à cette circonférence.

On détermine comme il suit, par le calcul, la limite en grandeur de l'angle B.

Que les droites BX et AY se rencontrent en un point F (que le lecteur peut suppléer dans la figure). Soit, par exemple $AX < A'X$; ou $SM \sin. X < SN \sin. Y$. Soient D et D' les points dans lesquels le lieu des points X rencontre la droite AA' et son prolongement; soit Z le centre de ce lieu.

Soient calculées les lignes AD, A'D, ZD, ZF, ZF sin. F; et soit établie l'inégalité ZF sin. F < ZD.

$$AD = AA' \times \frac{SM \sin. X}{SN \sin. Y + SM \sin. X}; \quad A'D = AA' \times \frac{SN \sin. Y}{SN \sin. Y + SM \sin. X}$$

$$AD' = AA' \times \frac{SM \sin. X}{SN \sin. Y - SM \sin. X}; \quad A'D' = AA' \times \frac{SN \sin. Y}{SN \sin. Y - SM \sin. X}.$$

$$ZD = \frac{AD + AD'}{2} = AA' \times \frac{SM \times SN \sin. X \sin. Y}{(SN \sin. Y + SM \sin. X)(SN \sin. Y - SM \sin. X)}.$$

$$AZ = ZD - AD = AA' \times \frac{SM^2 \sin.^2 X}{(SN \sin. Y + SM \sin. X)(SN \sin. Y - SM \sin. X)}.$$

$$FZ = FA - AZ = FA - AA' \times \frac{SM^2 \sin.^2 X}{(SN \sin. Y + SM \sin. X)(SN \sin. Y - SM \sin. X)}.$$

On a donc $FZ \sin. F = FA \sin. F - AA' \sin. F \times \frac{SM^2 \sin.^2 X}{(SN \sin. Y + SM \sin. X)(SN \sin. Y - SM \sin. X)}$.

Or, $FA \sin. F = AB \sin. B$.

$AA' \sin. X = AB \sin. ABA' = AB \sin. (Y+B)$.

On a donc, $\sin. B - \sin. (Y+B) \times \frac{SM^2 \sin. X \sin. F}{(SN \sin. Y + SM \sin. X)(SN \sin. Y - SM \sin. X)}$.

$$\leqq \sin. (Y+B) \times \frac{SM \times SN \sin. Y}{(SN \sin. Y + SM \sin. X)(SN \sin. Y - SM \sin. X)}.$$

et partant, $\frac{\sin. B}{\sin. Y+B} \leqq \frac{SM(SN \sin. Y + SM \sin. X \sin. F)}{(SN \sin. Y + SM \sin. X)(SN \sin. Y - SM \sin. X)}$.

$$\leqq \frac{SM(SN \sin. Y - SM \sin. X \sin. (X+Y))}{(SN \sin. Y + SM \sin. X)(SN \sin. Y - SM \sin. X)}.$$

et $\sin. Y \cot. B + \cos. Y \geqq \frac{(SN \sin. Y + SM \sin. X)(SN \sin. Y - SM \sin. X)}{SM(SN \sin. Y - SM \sin. X \sin. (X+Y))}$.

Réciproquement. On peut déterminer dans les angles donnés du quadrilatère, la limite du rapport de ses diagonales.

Le problème premièrement proposé, déterminer un quadrilatère dont on connoît les angles et les diagonales, est aisément ramené au précédent. En effet; soit fait un quadrilatère ayant les angles donnés, et dont le rapport des diagonales soit égal au rapport des diagonales données de grandeur. Si les diagonales de ce quadrilatère sont de la grandeur donnée, le problème est résolu. Si ces diagonales ne sont pas de la grandeur donnée; soit fait un quadrilatère semblable au premier, et dans lequel une des diagonales, et partant aussi l'autre, soit de la grandeur donnée.

Application du procédé algébrique. Soit ABXY un quadrilatère dont le côté AB est donné, dont tous les angles sont donnés, et dont le rapport des diagonales AX, BY, est donné.

Soient $x \cos. \alpha + y \sin. \alpha = d$.

$x \cos. \alpha' + y \sin. \alpha' = d'$

$x \cos. \alpha'' + y \sin. \alpha'' = d''$

$x \cos. \alpha''' + y \sin. \alpha''' = d'''$, les équations des quatre côtés AB, BX, XY, YA. Le côté AB étant donné de grandeur et de position, et les angles A, B, X, Y, étant donnés; dans ces quatre équations il n'y a d'inconnu que la distance d'' du côté XY à l'origine; soient déterminées dans les données $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha'''$, d, d', d''' et dans l'inconnue d'', les coordonnées des points X et Y dans lesquels la droite XY rencontre les côtés BX et AY;

coordonnées

Coordonnées du point X; $\frac{d''\sin.\alpha'-d'\sin.\alpha''}{\sin.(\alpha'-\alpha'')}$, $\frac{d'\cos.\alpha''-d''\cos.\alpha'}{\sin.(\alpha'-\alpha'')}$.

Coordonnées du point Y; $\frac{d''\sin.\alpha'''-d'''\sin.\alpha''}{\sin.(\alpha'''-\alpha'')}$, $\frac{d'''\cos.\alpha''-d''\cos.\alpha'''}{\sin.(\alpha'''-\alpha'')}$.

Coordonnées du point B; $\frac{d'\sin.\alpha-d\sin.\alpha'}{\sin.(\alpha-\alpha')}$, $\frac{d\cos.\alpha'-d'\cos.\alpha}{\sin.(\alpha-\alpha')}$.

Coordonnées du point A; $\frac{d''\sin.\alpha-d\sin.\alpha'''}{\sin.(\alpha-\alpha''')}$, $\frac{d\cos.\alpha'''-d'''\cos.\alpha}{\sin.(\alpha-\alpha''')}$.

De là, soient tirées les expressions des carrés des diagonales AX et BY; on fera leur rapport égal au rapport donné, et on déterminera l'inconnue d'' par une équation du second degré.

Quoique la doctrine des coordonnées soit recommandable par sa généralité, elle ne conduit pas toujours aux résultats par les procédés les plus simples. Parmi les procédés algébriques, le suivant me paroît préférable dans ce cas.

Que les côtés BX, AY, se rencontrent en F, et que la ligne FX, par exemple, soit prise pour inconnue, et désignée par x;

$$FY=FX\frac{\sin.X}{\sin.Y}=x\frac{\sin.X}{\sin.Y}.$$

$$AX^2=AF^2-2AF\times FX\cos.F+FX^2=AF^2-2AF\times x\cos.F+xx$$

$$BY^2=BF^2-2BF\times FY\cos.F+FY^2=BF^2-2BF\times x\frac{\sin.X}{\sin.Y}\cos.F+xx\frac{\sin.^2X}{\sin.^2Y}.$$

De là; le rapport donné des carrés de ces diagonales sert à établir l'équation de laquelle on tire la valeur de x.

§ 143.

Problème. On demande un quadrilatère dont on connoît les angles, la surface et le contour.

Lemme premier. Trouver deux droites dont on connoît la différence, et dont on connoît aussi la différence des espaces qui ont des rapports donnés à leurs carrés.

Soit AA′ la différence donnée de deux droites AX, A′X. On demande de déterminer ces deux droites de manière que la différence des espaces qui ont des rapports donnés dont les exposans sont m et m′ aux carrés des droites AX et A′X soit égale à un espace S donné de grandeur. FIG. 95.

Premier cas. Que les exposans m et m′ soient égaux entr'eux, ou que la différence des carrés des droites AX et A′X soit donnée. Puisque cette différence

est égale au rectangle de la somme des deux droites par leur différence, la somme des deux droites est aussi donnée ; donc, ces deux droites sont l'une et l'autre données.

Second cas. Soit $m < m'$. Soit Z (situé dans la direction $AA'Z$) l'excentre des moyennes distances des points A et A' pour les coefficiens m et m' ; de manière que $m \times AZ = m' \times A'Z$; on a (§ 40) $m \times AZ^2 - m' \times A'Z^2 = AA'^2 \times \frac{mm'}{m'-m}$; et

$$m \times AX^2 - m' \times A'X^2 = AA'^2 \times \frac{mm'}{m'-m} - (m'-m)\, ZX^2 = S.$$

Donc, $ZX^2 = AA'^2 \times \frac{mm'}{(m'-m)^2} - \frac{1}{m'-m} S.$

Limite. La plus grande valeur de l'espace S est $AA'^2 \times \frac{mm'}{m'-m}$; alors $ZX = 0$; et $AX : A'X = m' : m$.

Troisième cas. Soit $m > m'$. Soit Z (situé dans la direction ZAA') l'excentre des moyennes distances des points A et A' pour les coefficiens m et m', de manière que $m \times AZ = m' \times A'Z$; on a (§ 40) $m \times AZ^2 - m' \times A'Z^2 = AA'^2 \times \frac{mm'}{m-m'}$.

$$m \times AX^2 - m' \times A'X^2 = (m-m')\, ZX^2 + AA'^2 \times \frac{mm'}{m-m'} = S.$$

Partant, $ZX^2 = S \times \frac{1}{m-m'} - AA'^2 \times \frac{mm'}{(m-m')^2}$.

Limite. La plus petite valeur de S est $AA'^2 \times \frac{mm'}{m-m'}$; et alors, $AX : A'X = m' : m$.

Quatrième cas. Que l'espace S soit la différence des espaces $m' \times A'X^2$ et $m \times AX^2$.

Puisque AX est supposée devoir être plus grande que A'X ; m doit être plus petit que m' ; l'excentre Z est dans la direction $AA'Z$; et on a l'équation

$$S = ZX^2(m'-m) - AA'^2 \times \frac{mm'}{m'-m} ;$$

$$ZX^2 = S \times \frac{1}{m'-m} + AA'^2 \times \frac{mm'}{(m'-m)^2}.$$

Remarque. Il est aisé de ramener l'énoncé de ce lemme au suivant. Trouver deux droites, dont on connoît la différence des carrés, et la différence de leurs rectangles par des droites données ; ou trouver un triangle rectangle dont on connoît une jambe de l'angle droit, et la différence des rectangles de l'hypothénuse et de l'autre jambe de l'angle droit par des droites données.

Lemme second. Soit un quadrilatère dont les angles sont donnés, on demande d'exprimer son contour dans ses angles et dans deux des côtés opposés.

Soit ABCD un quadrilatère dont les angles sont donnés; on demande d'exprimer son contour dans les angles et dans les côtés opposés AB, CD. FIG. 96.

Que les côtés AD, BC, se rencontrent en S. Que les angles du quadrilatère, en tant qu'ils appartiennent aux triangles ASB, CSD, soient désignés par A,B,C,D, respectivement.

Le contour du triangle ASB est $AB\left(1+\frac{\sin.\,A+\sin.\,B}{\sin.\,S}\right)=2AB\frac{\cos.\frac{1}{2}A\cos.\frac{1}{2}B}{\sin.\frac{1}{2}S}$.

L'excès de la somme des côtés SC, SD, sur le côté CD est

$$CD\left(\frac{\sin.\,C+\sin.\,D}{\sin.\,S}-1\right)=2CD\frac{\sin.\frac{1}{2}C\sin.\frac{1}{2}D}{\sin.\frac{1}{2}S}.$$

Partant, le contour du quadrilatère est $2AB\frac{\cos.\frac{1}{2}A\cos.\frac{1}{2}B}{\sin.\frac{1}{2}S}-2CD\frac{\sin.\frac{1}{2}C\sin.\frac{1}{2}D}{\sin.\frac{1}{2}S}$.

Lemme troisième. Soit un quadrilatère dont les angles sont donnés; on demande d'exprimer sa surface dans ses angles et dans deux côtés opposés.

$$2\,\text{surf.}=AS\times SB\sin.\,S-CS\times SD\sin.\,S$$

$$=AB^2\times\frac{\sin.\,A\sin.\,B}{\sin.\,S}-CD^2\times\frac{\sin.\,C\sin.\,D}{\sin.\,S}.$$

$$\text{surf.}=AB^2\times\frac{\cos.^2\frac{1}{2}A\cos.^2\frac{1}{2}B}{\sin.^2\frac{1}{2}S}\times\text{tang.}\frac{1}{2}A\,\text{tang.}\frac{1}{2}B\,\text{tang.}\frac{1}{2}S$$

$$-CD^2\times\frac{\sin.^2\frac{1}{2}C\sin.^2\frac{1}{2}D}{\sin.^2\frac{1}{2}S}\times\text{cot.}\frac{1}{2}C\,\text{cot.}\frac{1}{2}D\,\text{tang.}\frac{1}{2}S.$$

Application au problème proposé. Déterminer un quadrilatère dont on connoît les angles, la surface et le contour.

L'expression du demi-contour donné est $AB\frac{\cos.\frac{1}{2}A\cos.\frac{1}{2}B}{\sin.\frac{1}{2}S}-CD\times\frac{\sin.\frac{1}{2}C\sin.\frac{1}{2}D}{\sin.\frac{1}{2}S}$;

L'expression de la surface donnée est

$$AB^2\times\frac{\cos.^2\frac{1}{2}A\cos.^2\frac{1}{2}B}{\sin.^2\frac{1}{2}S}\times\text{tang.}\frac{1}{2}A\,\text{tang.}\frac{1}{2}B\,\text{tang.}\frac{1}{2}S$$

$$-CD^2\times\frac{\sin.^2\frac{1}{2}C\sin.^2\frac{1}{2}D}{\sin.^2\frac{1}{2}S}\times\text{cot.}\frac{1}{2}C\,\text{cot.}\frac{1}{2}D\,\text{tang.}\frac{1}{2}S;$$

Partant, on connoît la différence des droites $AB\frac{\cos.\frac{1}{2}A\cos.\frac{1}{2}B}{\sin.\frac{1}{2}S}$, et $CD\frac{\sin.\frac{1}{2}C\sin.\frac{1}{2}D}{\sin.\frac{1}{2}S}$; et la différence des espaces qui ont aux carrés de ces droites des rapports dont les exposans sont $\text{tang.}\frac{1}{2}A\,\text{tang.}\frac{1}{2}B\,\text{tang.}\frac{1}{2}S$ et $\text{cot.}\frac{1}{2}C\,\text{cot.}\frac{1}{2}D\,\text{tang.}\frac{1}{2}S$ respectivement. Donc, le problème proposé est réduit au lemme premier.

Digitized by Google

1.° Soit tang. $\frac{1}{2}$ A tang. $\frac{1}{2}$ B $=$ cot. $\frac{1}{2}$ C cot. $\frac{1}{2}$ D ; le problème proposé a une seule solution. Cela a lieu en particulier lorsque les angles opposés du quadrilatère sont égaux entr'eux, et partant, lorsque le quadrilatère est un parallélogramme.

2.° Soit tang. $\frac{1}{2}$ A tang. $\frac{1}{2}$ B $>$ cot. $\frac{1}{2}$ C cot. $\frac{1}{2}$ D. Le problème proposé est susceptible de limite, de manière que la plus grande valeur de la surface a lieu lorsque AB sin. $\frac{1}{2}$ A sin. $\frac{1}{2}$ B $=$ CD cos. $\frac{1}{2}$ C cos. $\frac{1}{2}$ D. J'affirme que cela a lieu lorsque le quadrilatère est circonscriptible au cercle.

En effet, soit ABCD un quadrilatère circonscrit au cercle dont le centre est *Z*. Les angles A, B, C, D, étant coupés en deux parties égales par les droites ZA, ZB, ZC, ZD, les angles AZB, CZD, sont supplémens l'un de l'autre ; et partant, leurs sinus sont égaux entr'eux.

Or, AB : BZ $=$ sin. AZB : sin. $\frac{1}{2}$ A
BZ : CZ $=$ sin. $\frac{1}{2}$ C : sin. $\frac{1}{2}$ B
CZ : CD $=$ sin. $\frac{1}{2}$ D : sin. CZD,

donc, AB : CD $=$ sin. $\frac{1}{2}$ C sin. $\frac{1}{2}$ D : sin. $\frac{1}{2}$ A sin. $\frac{1}{2}$ B (en désignant par A, B, C et D les angles du quadrilatère).

On démoutre (réciproquement) par la méthode des inverses, que si les côtés opposés d'un quadrilatère sont en raison inverse des produits des sinus des demi-angles adjacens à ces côtés, le quadrilatère est circonscriptible au cercle.

Partant, lorsqu'on connoît les angles et le contour d'un quadrilatère, sa surface est la plus grande lorsqu'il est circonscriptible au cercle.

Remarque. On peut étendre cette proposition aux figures d'un nombre quelconque de côtés, et démontrer que de toutes les figures dont les angles sont donnés et dont le contour est donné, la plus grande est celle qui est circonscriptible à un cercle (1).

§ 144.

Problème. Soit un quadrilatère donné de grandeur et d'espèce ; mener une droite qui coupe les côtés de ce quadrilatère, de manière qu'elle soit coupée par ces côtés en parties qui aient entr'elles des rapports donnés. Réciproquement ;

(1) Quoique l'application des lieux géométriques à la recherche des problèmes déterminés soit très-souvent facile et commode, et qu'il en soit de même de la méthode des coordonnées ; cependant, il est plusieurs questions auxquelles ces deux méthodes ne se prêtent que difficilement, et dans lesquelles elles donneroient lieu à des longueurs qu'on peut éviter en employant des procédés plus directement adaptés à la nature de ces questions. Le problème traité dans ce § en fournit un exemple entre plusieurs autres.

soient

soient quatre points donnés sur une droite. Mener par chacun de ces points une droite, de manière que le quadrilatère formé par les droites menées soit donné d'espèce.

Il me paroît convenable de développer la première solution du second problème; et pour la faciliter je vais exposer quelques lemmes.

Lemme premier connu. Soient trois points en ligne droite. De ces points soient abaissées sur une même droite des perpendiculaires; soient pris les rectangles de chacune de ces perpendiculaires par la distance des deux autres. La somme des rectangles répondant aux points extrêmes, est égale au rectangle répondant au point intermédiaire.

Lemme second. Soient trois points (non en ligne droite) donnés de position; Mener par un quatrième point donné de position une droite sur laquelle abaissant des perpendiculaires depuis les trois autres, le rapport des distances de ces perpendiculaires soit donné.

Soient A, A′, A″, trois points donnés de position (non en ligne droite); soit B un quatrième point donné. Mener par B une droite sur laquelle abaissant les perpendiculaires AP, A′P′, A″P″, le rapport de PP′ à P′P″ soit égal à un rapport donné. FIG. 97.

Analyse. Que les droites AA′ et A″P″ (prolongées s'il est nécessaire) se rencontrent en a″. Le rapport de PP′ à P′P″ est égal au rapport de AA′ à A′a″; mais AA′ est donnée de grandeur; donc, A′a″ est donnée de grandeur; et a″ est donné de position. Donc, a″A″ est donné de position; et partant, BP″ perpendiculaire à a″A″ est aussi donnée de position.

Construction. Soit le rapport donné de PP′ à P′P″ égal au rapport de AA′ à A′a″, et soit A′a″ prise sur la direction de AA′ depuis le point A′. Soit menée a″A″; et sur elle soit abaissée depuis le point B une perpendiculaire, elle sera la droite cherchée.

La *démonstration* découle de l'analyse.

Remarque 1.re La droite A′a″ peut être portée sur la direction de AA′ de part et d'autre du point A′; et partant, il y a deux droites qui répondent à la question proposée.

Remarque 2.e Lorsque le point a″ convient avec le point A″, la position de la droite a″A″ est indéterminée; et partant aussi la question est indéterminée, et le rapport de PP′ à P′P″ est déterminé à être égal au rapport de AA′ à A′A″.

Recherche algébrique. Que les angles ABA′, ABA″, A′BA″ soient désignés par α'', α', α, respectivement.

Digitized by Google

Soit $ABP=x$; $A'BP'=2D-(\alpha''+x)$; $A''BP''=2D-(\alpha'+x)$.

$BP=AB\cos.x$; $BP'=A'B\cos.(2D-(\alpha''+x))$; $BP''=A''B\cos.(2D-(\alpha'+x))$.

$PP'=BP+BP'=AB\cos.x-A'B\cos.(\alpha''+x)$.

$PP''=BP+BP''=AB\cos.x-A''B\cos.(\alpha'+x)$.

$P'P''=BP''-BP'=A'B\cos.(\alpha''+x)-A''B\cos.(\alpha'+x)$.

Que les distances PP', PP'', P'P', doivent être entr'elles comme les quantités m'', m', m, respectivement ($m'=m+m''$).

On a l'équation ; $\dfrac{AB\cos.x-A''B\cos.(\alpha'+x)}{A'B\cos.(\alpha''+x)-A''B\cos.(\alpha'+x)}=\dfrac{m'}{m}$;

ou $m\times AB\cos.x-m'\times A'B\cos.(\alpha''+x)+m''\times A''B\cos.(\alpha'+x)=0$; de laquelle on tire, $\cot.x=\dfrac{-m'\times A'B\sin.\alpha''+m''\times A''B\sin.\alpha'}{m\times AB-m'\times A'B\cos.\alpha''+m''\times A''B\cos.\alpha'}=\cot.ABP$.

On détermine de même $\cot.(\alpha+x)$ et $\cot.(\alpha''+x)$; ou $\cot.A'BP'$ et $\cot.A''BP''$.

La question est indéterminée, lorsqu'on a en même tems les deux équations suivantes.

$$m'\times A'B\sin.\alpha''=m''\times A''B\sin.\alpha'$$
$$m'\times A'B\cos.\alpha''=m''\times A''B\cos.\alpha'+(m'-m'')AB\,;$$

Alors ; $\dfrac{m'}{m''}=\dfrac{A''B\sin.\alpha'}{A'B\sin.\alpha''}=\dfrac{A''B\cos.\alpha'-AB}{A'B\cos.\alpha''-AB}$;

De là, $A'B\times BA''\sin.\alpha=AB\times BA''\sin.\alpha'-AB\times BA'\sin.\alpha''$;

partant, $A'BA''=ABA''-ABA'$. Lorsque cette équation a lieu, les points A, A', A'' sont en ligne droite ; et alors, le rapport de m' à m'' est déterminé à être celui de $A''B\sin.\alpha'$ à $A'B\sin.\alpha''$, conformément à ce qui a été trouvé par le procédé géométrique.

Lemme troisième. Soient trois cercles qui se coupent en un même point donnés de grandeur et de position. Mener par ce point une droite dont les parties (non adjacentes à ce point) comprises entre les circonférences de ces cercles, soient entr'elles dans des rapports donnés.

Fig. 98. Soient C, C', C'', les centres de trois cercles donnés qui se coupent en un même point B ; mener par B une droite qui rencontre les circonférences de ces cercles dans les points X, X', X'' ; de manière que les droites XX', X'X'', X''X soient entr'elles comme les quantités données m'', m, m', respectivement.

Analyse. Soient CP, C'P', C''P'' perpendiculaires à BX.

Puisque $BX=2BP$, $BX'=2BP'$, $BX''=2BP''$;

$XX'=2PP'$, $X'X''=2P'P''$. $X''X=2P''P$;

et partant, les droites PP', P'P'', P''P, sont entr'elles comme les droites m'', m et m'. Donc, le problème proposé est réduit au précédent.

Construction. Soit menée par B la droite sur laquelle abaissant les perpendiculaires CP, C'P', C''P'', les droites PP', P'P'', P''P, soient entr'elles comme les quantités données m'', m, m'; cette droite est la droite cherchée.

Démonstration. Elle découle de l'analyse.

Remarque. Lorsque les centres C, C', C'', sont en ligne droite, la question est indéterminée; et le rapport des droites XX', X'X'', X''X, est déterminé à être celui des droites CC', C'C'', C''C.

Problème. Soient A, A', A'', B, quatre points donnés de position sur une même droite; mener par A, A', A'' et par B quatre droites, dont les trois premières rencontrent la quatrième dans les points X, X', X'', de manière que les angles AXB, A'X'B, A''X''B soient donnés; et que les droites XX', X'X'', XX'' soient entr'elles comme des droites données m'', m, m'.

Analyse. Que les angles donnés de grandeur AXB, A'X'B, A''X''B, soient appelés φ, φ', φ'', respectivement. Sur les droites BA, BA', BA'' comme bases soient décrits des segmens de cercle capables des angles donnés φ, φ', φ''; soient C, C', C'', les centres de ces cercles; le problème proposé est réduit au lemme troisième.

Construction. Sur les droites BA, BA', BA'', comme bases, soient décrits des segmens de cercle capables des angles donnés φ, φ', φ''. Soient C, C', C'', les centres des cercles auxquels ces segmens appartiennent. Par B soit menée une droite qui rencontre en X, X', X'', les circonférences de ces cercles, de manière que ses parties XX', X'X'', X''X, soient entr'elles comme les droites données m'', m, m'; soient menées les droites AX, A'X', A''X'', et le problème est résolu.

Démonstration. Elle découle de l'analyse.

Remarque. Porisme. Le problème proposé est indéterminé lorsque les centres C, C', C'', sont en ligne droite. Alors, les droites m, m', m'', sont déterminées à être entr'elles comme les droites C'C'', CC'', CC', ou comme les droites A'A'', AA'', AA', respectivement.

Un des trois angles φ, φ', φ'', est aussi déterminé dans les deux autres. En effet, soient CD, C'D', C''D'', perpendiculaires à la droite AA'A''; on a (lemme premier) $CD \times D''D' + C''D'' \times DD' = C'D' \times DD''$;

ou, $BA \cot.\varphi \times A'A'' + BA'' \cot.\varphi'' \times AA' = BA' \cot.\varphi' \times AA''$; et partant, cette équation détermine l'un des angles φ, φ', φ'', dans les deux autres, lorsque le problème est indéterminé.

Problème. Soient quatre droites données de position (dont trois quelconques ne passent pas par un même point); mener une droite dont les parties comprises entre les premières soient entr'elles dans des rapports donnés.

Ce problème est l'inverse du premier, et il est résolu par fausse position comme il suit.

Sur une droite quelconque soient pris quatre points dont les distances soient entr'elles dans les rapports donnés. Par ces points soient menées quatre droites formant un quadrilatère semblable à celui que forment les quatre droites données de position. Si ce dernier quadrilatère est le même que le premier, le problème est résolu ; sinon, soit fait une figure semblable à la figure obtenue dans laquelle le quadrilatère obtenu soit de la grandeur donnée.

Fig. 99. *Recherche algébrique*, du premier problème proposé. Soit l'angle XBA désigné par x.

$$BX = BA\,\frac{\sin.(\phi+x)}{\sin.\phi}$$

$$BX' = BA'\,\frac{\sin.(\phi'+x)}{\sin.\phi'}$$

$$BX'' = BA''\,\frac{\sin.(x-\phi'')}{\sin.\phi''}.$$

$$XX' = BA'\,\frac{\sin.(x+\phi')}{\sin.\phi'} - BA\,\frac{\sin.(x+\phi)}{\sin.\phi}$$

$$X'X'' = BA'\,\frac{\sin.(x+\phi')}{\sin.\phi'} + BA''\,\frac{\sin.(x-\phi'')}{\sin.\phi''}.$$

Equation,
$$\frac{BA'\,\frac{\sin.(x+\phi')}{\sin.\phi'} - BA\,\frac{\sin.(x+\phi)}{\sin.\phi}}{BA'\,\frac{\sin.(x+\phi')}{\sin.\phi'} + BA''\,\frac{\sin.(x-\phi'')}{\sin.\phi''}} = \frac{m''}{m}.$$

ou, $\dfrac{BA'\sin.\phi\,\sin.(x+\phi') - BA\,\sin.\phi'\sin.(x+\phi)}{BA'\sin.\phi''\sin.(x+\phi') + BA''\sin.\phi'\sin.(x-\phi'')} = \dfrac{m''\sin.\phi}{m\sin.\phi''}$; de là, après les réductions convenables ; on trouve

$$\cot.(2D-x) = \frac{m'BA'\sin.\phi\cos.\phi'\sin.\phi'' - mBA\cos.\phi\sin.\phi'\sin.\phi'' - m''BA''\sin.\phi\sin.\phi'\cos.\phi''}{\sin.\phi\sin.\phi'\sin.\phi''\,(m'\times BA' - m\times BA - m''\times BA'')}.$$

L'expression de cot. x est indéterminée lorsque les deux termes de cette fraction sont l'un et l'autre zéro ; et partant, lorsqu'on a en même tems les deux équations $m'\times BA' = m\times BA + m''\times BA''$,

et $m'\times BA'\sin.\phi\cos.\phi'\sin.\phi'' = m\times BA\cos.\phi\sin.\phi'\sin.\phi'' + m''\times BA''\sin.\phi\sin.\phi'\cos.\phi''$

ou, $m'\times BA'\cot.\phi' = m\times BA\cot.\phi + m''\times BA''\cot.\phi''$, conformément au résultat de la recherche géométrique.

Le problème que je viens de résoudre, d'après la supposition que les points

points B, A, A', A'', sont en ligne droite, est un cas particulier d'un problème général dont je vais m'occuper.

§. 145.

Problème. A un quadrilatère donné circonscrire un quadrilatère donné d'espèce; et réciproquement, à un quadrilatère donné inscrire un quadrilatère donné d'espèce (1).

Soit BAA'A'' un quadrilatère donné de grandeur et d'espèce; on demande Fig. 100.
de lui circonscrire le quadrilatère Xxx''X'' donné d'espèce.

Analyse. Soit menée la diagonale BA'; et que le côté xx'' rencontre en X' le côté XX'' qui passe par B.

Le quadrilatère Xxx''X'' étant donné d'espèce, les angles X, X', X'', sont donnés, et partant, les points X, X', X'', sont à des segmens de cercle capables de ces angles et décrits sur les droites BA, BA', BA'', comme bases. Soient C, C', C'' les centres de ces cercles. Item, les rapports des droites XX', X'X'', X''X sont donnés. Donc, le problème proposé est réduit au lemme 3.e du § précédent.

Construction. Soient φ, φ', φ'', les angles donnés X, X', X'', et que les droites XX', X'X'', X''X, doivent être entr'elles comme les droites m'', m, m'.

Sur les droites BA, BA', BA'', comme bases, soient décrits des segmens de cercle capables des angles donnés φ, φ', φ'', respectivement. Soient C, C', C'', les centres de ces cercles. Par B soit menée une droite qui rencontre les circonférences de ces cercles en X, X', X'', de manière que les droites XX', X'X'', X''X soient entr'elles comme les droites données m'', m, m'; les droites BX, AX, A'X', A''X'', résolvent la question.

Démonstration. Elle découle de l'analyse.

Remarque. La solution du problème général dans lequel les points B, A, A', A'', ont des positions quelconques non en ligne droite, est tout à fait conforme à la solution du cas particulier dans lequel ces points sont en ligne droite, et elle donne lieu aux mêmes observations.

En particulier, lorsque les centres C, C', C'', sont en ligne droite, la question est indéterminée; le rapport des droites XX', X'X'', X''X, est déterminé à être celui des distances CC', C'C'', C''C, des centres de ces cercles; et l'un des angles

(1) Les expressions, *inscrire* et *circonscrire*, sont prises dans un sens général; savoir, quatre droites (qui ne se coupent pas trois à trois en un même point) étant données de position; décrire un quadrilatère donné d'espèce dont les sommets soient sur ces droites; et réciproquement, pour un quadrilatère dont les côtés passent par les points de section de ces droites.

Digitized by Google

ϕ, ϕ', ϕ'' est déterminé dans les deux autres. Je vais m'occuper de l'une et de l'autre de ces déterminations dans ce cas indéterminé.

Soient D, D', D'', les milieux des droites BA, BA', BA'', respectivement. Soient S, S', S'', les points de rencontre des perpendiculaires élevées de ces points aux droites BA' et BA'', BA et BA'', et BA et BA' respectivement. Soient les angles ASA', ASA'', A'SA'' désignés par α'', α', α, respectivement.

$$CD = BD\cot.\phi;\ C'D' = BD'\cot.\phi';\ C''D'' = BD''\cot.\phi''.$$

On trouve aussi (par la trigonométrie) ;

$$S'D\sin.\alpha' = BD\cos.\alpha' - BD'';\quad S'D''\sin.\alpha' = BD - BD''\cos.\alpha'.$$

$$SD'\sin.\alpha = BD'\cos.\alpha - BD'';\quad SD''\sin.\alpha = BD' - BD''\cos.\alpha$$

$$S''D\sin.\alpha'' = BD\cos.\alpha'' - BD';\quad S''D'\sin.\alpha'' = BD - BD'\cos.\alpha''.$$

$$S'C\sin.\alpha' = BD\frac{\sin.(\phi-\alpha')}{\sin.\phi} - BD'';\quad S'C''\sin.\alpha' = BD - BD''\frac{\sin.(\phi''+\alpha')}{\sin.\phi''}.$$

$$SC'\sin.\alpha = BD'\frac{\sin.(\phi'-\alpha)}{\sin.\phi'} - BD'';\quad SC''\sin.\alpha = BD' - BD''\frac{\sin.(\phi''+\alpha)}{\sin.\phi''}.$$

$$S''C\sin.\alpha'' = BD\frac{\sin.(\phi-\alpha'')}{\sin.\phi} - BD';\quad S''C'\sin.\alpha'' = BD - BD'\frac{\sin.(\phi'+\alpha'')}{\sin.\phi'}$$

Que les centres C, C', C'', soient sur une même droite, et partant, que la question soit indéterminée ; on peut déterminer les rapports des droites, CC', C'C'', C''C.

En effet, $CC' : S''C = \sin.\alpha'' : \sin.C'$

$$SC'' : C'C'' = \sin.C' : \sin.\alpha$$

Donc, $CC' : C'C'' = S''C\sin.\alpha'' : SC''\sin.\alpha$

De même, $C'C'' : CC'' = SC'\sin.\alpha : S'C\sin.\alpha'$

$$CC'' : CC' = S'C''\sin.\alpha' : S'C'\sin.\alpha''.$$

Puisque, $CC' : C'C'' = S''C\sin.\alpha'' : SC''\sin.\alpha$

$$CC'' : CC' = S''C\sin.\alpha'' + SC''\sin.\alpha : S''C\sin.\alpha''$$

Donc aussi, $S'C''\sin.\alpha' : S'C'\sin.\alpha'' = S''C\sin.\alpha'' + SC''\sin.\alpha : S''C\sin.\alpha''$,

ou, $$BD - BD''\frac{\sin.(\phi''+\alpha')}{\sin.\phi''} : BD - BD'\frac{\sin.(\phi'+\alpha'')}{\sin.\phi'}$$

$$= BD\frac{\sin.(\phi-\alpha'')}{\sin.\phi} - BD'\frac{\sin.(\phi''+\alpha)}{\sin.\phi''} : BD\frac{\sin.(\phi-\alpha'')}{\sin.\phi} - BD'.$$

Cette proportion sert à déterminer l'un des angles ϕ, ϕ', ϕ'', dans les deux autres ; après les réductions convenables on trouve l'équation

Digitized by Google

$$\mathrm{BD}\times\mathrm{BD}'\,\frac{\sin.(\phi'-\phi+\alpha'')}{\sin.\phi\sin.\phi'}+\mathrm{BD}\times\mathrm{BD}''\,\frac{\sin.(\phi''-\phi+\alpha')}{\sin.\phi\sin.\phi''}=\mathrm{BD}'\times\mathrm{BD}''\,\frac{\sin.(\phi''-\phi'+\alpha)}{\sin.\phi'\sin.\phi''}.$$

Soient r, r', r'', les rayons des cercles auxquels appartiennent les segmens capables des angles ϕ, ϕ', ϕ'' ; on a aussi,

$$rr'\sin.(\phi'-\phi+\alpha'')+rr''\sin.(\phi''-\phi+\alpha')=r'r''\sin.(\phi''-\phi'+\alpha).$$

Cette équation est la même que la suivante.

$$\begin{aligned}&\mathrm{BD}\times\mathrm{BD}'\times((\cot.\phi-\cot.\phi')\cos.\alpha''+(\cot.\phi\cot.\phi'-1)\sin.\alpha'')\\&+\mathrm{BD}\times\mathrm{BD}''\,((\cot.\phi-\cot.\phi'')\cos.\alpha'+(\cot.\phi\cot.\phi''-1)\sin.\alpha')\\&=\mathrm{BD}'\times\mathrm{BD}''\,((\cot.\phi'-\cot.\phi'')\cos.\alpha+(\cot.\phi'\cot.\phi''-1)\sin.\alpha);\end{aligned}$$

de laquelle il est aisé de tirer la valeur de l'un des angles ϕ, ϕ', ϕ'' dans les deux autres.

Je vais traiter encore le problème proposé d'une manière purement algébrique.

Que l'angle ABX, que la droite menée par B fait avec BA, soit désigné par x.

$$\begin{aligned}&\mathrm{ABX}=x;\qquad&&\mathrm{BAX}=2\mathrm{D}-(\phi+x)\\&\mathrm{A'BX}=\alpha''+x\qquad&&\mathrm{BA'X'}=2\mathrm{D}-(\phi'+\alpha''+x)\\&\mathrm{A''BX}=\alpha'+x\qquad&&\mathrm{BA''X''}=2\mathrm{D}-(\phi''+\alpha'+x).\end{aligned}$$

$$\mathrm{BX}=\mathrm{BA}\,\frac{\sin.(\phi+x)}{\sin.\phi}\qquad \mathrm{XX'}=\mathrm{BA}\,\frac{\sin.(\phi+x)}{\sin.\phi}-\mathrm{BA'}\,\frac{\sin.(\phi'+\alpha''+x)}{\sin.\phi'}$$

$$\mathrm{BX'}=\mathrm{BA'}\,\frac{\sin.(\phi'+\alpha''+x)}{\sin.\phi'};\ \mathrm{X'X''}=\mathrm{BA'}\,\frac{\sin.(\phi'+\alpha''+x)}{\sin.\phi'}-\mathrm{BA''}\,\frac{\sin.(\phi''+\alpha'+x)}{\sin.\phi''}.$$

$$\mathrm{BX''}=\mathrm{BA''}\,\frac{\sin.(\phi''+\alpha'+x)}{\sin.\phi''}.$$

Pour abréger, soit $\mathrm{BA}\cdot\mathrm{cosec}.\,\phi=d$

$\mathrm{BA'}\cdot\mathrm{cosec}.\,\phi'=d'$

$\mathrm{BA''}\cdot\mathrm{cosec}.\,\phi''=d''$

$$\begin{aligned}&d\sin.(\phi+x)-d'\sin.(\phi'+\alpha''+x):d'\sin.(\phi'+\alpha''+x)-d''\sin.(\phi''+\alpha'+x)=m'':m,\\&md\,(\sin.\phi\cos.x+\cos.\phi\sin.x)\\&-md'(\sin.(\phi'+\alpha'')\cos.x+\cos.(\phi'+\alpha'')\sin.x)\\&=m'd'(\sin.(\phi'+\alpha'')\cos.x+\cos.(\phi'+\alpha'')\sin.x)\\&-m''d''(\sin.(\phi''+\alpha')\cos.x+m''d''\cos.(\phi''+\alpha')\sin.x).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\cos.x\,(md\sin.\phi-md'\sin.(\phi'+\alpha'')-m''d'\sin.(\phi'+\alpha'')+m''d''\sin.(\phi''+\alpha'))\\&+\sin.x\,(md\cos.\phi-md'\cos.(\phi'+\alpha'')-m''d'\cos.(\phi'+\alpha'')+m''d''\cos.(\phi''+\alpha'))=0,\end{aligned}$$

$$\cot.x=-\frac{md\cos.\phi-md'\cos.(\phi'+\alpha'')-m''d'\cos.(\phi'+\alpha'')+m''d''\cos.(\phi''+\alpha')}{md\sin.\phi-md'\sin.(\phi'+\alpha'')-m''d'\sin.(\phi'+\alpha'')+m''d''\sin.(\phi''+\alpha')}.$$

Digitized by Google

La valeur de x est indéterminée lorsque les deux termes de cette fraction évanouissent en même tems ; on a donc les deux valeurs de l'exposant $\frac{m}{m'}n$.

$$\frac{m}{m'}=\frac{d'\cos.(\phi'+\alpha'')-d''\cos.(\phi''+\alpha')}{d\cos.\phi-d'\cos.(\phi'+\alpha'')}$$

$$\frac{m}{m'}=\frac{d'\sin.(\phi'+\alpha'')-d''\sin.(\phi''+\alpha')}{d\sin.\phi-d'\sin.(\phi'+\alpha'')}.$$

De là, $dd'\sin.\phi\cos.(\phi'+\alpha'')-dd''\sin.\phi\cos(\phi''+\alpha')-d'd'\sin.(\phi'+\alpha'',\cos.(\phi+\alpha'')$
$+d'd''\sin.(\phi'+\alpha'')\cos.(\phi''+\alpha')=dd'\cos.\phi\sin.(\phi'+\alpha'')-dd''\cos.\phi\sin.(\phi''+\alpha')$
$-d'd'\sin.(\phi'+\alpha'')\cos.(\phi'+\alpha'')+d'd''\cos.(\phi'+\alpha'')\sin.(\phi''+\alpha',)$

ou $-dd'\sin.(\phi'-\phi+\alpha'')-dd''\sin.(\phi''-\phi+\alpha')-d'd''\sin.(\phi''-\phi'+\alpha)=0$; conformément au résultat de l'application du calcul au procédé géométrique.

Remarque. Le problème inverse, à un quadrilatère donné inscrire un quadrilatère donné d'espèce, se résout au moyen du premier ; savoir, soit fait un quadrilatère quelconque semblable au quadrilatère inscriptible ; à ce quadrilatère soit circonscrit un quadrilatère semblable au quadrilatère proposé. Si ce dernier quadrilatère convient avec le quadrilatère proposé le problème est résolu. Si non, soit faite une figure (composée des quadrilatères inscrits et circonscrits) semblable à la figure obtenue, et dans laquelle le quadrilatère circonscrit soit de la grandeur donnée.

Scholie. Les problèmes qui font le sujet des deux derniers §§ peuvent aussi être résolus au moyen du lieu développé dans le § 52, ainsi que je l'ai déjà insinué dans le dernier exemple du § 128.

Les problèmes qui viennent de nous occuper ont fixé l'attention de plusieurs mathématiciens. NEWTON, dans ses principes, en fait voir l'application à la détermination des orbites des corps célestes. Le Père BOSCOWICH a le premier remarqué le cas indéterminé auquel donne lieu le premier problème sur la *duction* de la droite comprise entre quatre droites données de position dont les parties sont entr'elles dans des rapports donnés ; et d'après cette indétermination, il a montré que l'application du problème proposé aux usages astronomiques est souvent trompeuse. Le D^r. PLAYFAIR, dans le Mémoire déjà cité, a insisté d'une manière très-lumineuse sur ces deux problèmes, pour éclaircir son sentiment sur la nature des porismes. Voyez le Mémoire déjà cité du D^r. PLAYFAIR, les principes de NEWTON, et les dissertations de BOSCOWICH imprimées à Rome en 1749.

§ 146.

§ 146.

Problème. A un cercle donné inscrire un triangle, dont les côtés soient parallèles à des droites données de position, ou passent par des points donnés de position.

Cet énoncé général donne lieu à quatre problèmes particuliers.

1.° Les trois côtés du triangle cherché sont parallèles à des droites données de position.

2.° Deux des côtés du triangle cherché sont parallèles à des droites données de position, et le troisième côté passe par un point donné.

3.° Un des côtés du triangle cherché est parallèle à une droite donnée de position; et chacun des deux autres côtés passe par un point donné.

4.° Chacun des côtés du triangle cherché passe par un point donné.

Premier problème. Que les trois côtés du triangle cherché soient parallèles à des droites dounées de position.

Les angles du triangle cherché sont donnés, donc ce triangle est donné d'espèce; et en particulier les rapports de ses côtés au rayon du cercle circonscrit sont donnés; donc aussi, chacun des côtés de ce triangle est donné de grandeur.

Second problème. Que deux des côtés du triangle cherché soient parallèles à deux droites données de position; et que le troisième côté passe par un point donné.

Analyse. Les deux premiers côtés font entr'eux un angle donné; et le troisième côté retranche du cercle donné un segment capable de cet angle; donc, ce troisième côté est donné de grandeur; mais, ce côté passe par un point donné de position, donc il est donné de position.

Construction. Au cercle donné soit inscrite une corde qui retranche de ce cercle un segment capable de l'angle formé par les deux premières droites. Soit décrit un cercle concentrique au cercle donné, et dont la circonférence touche cette corde. A ce second cercle soit menée (s'il est possible) une tangente depuis le point donné; la partie de cette tangente comprise en dedans du premier cercle, est le troisième côté du triangle cherché.

Remarque et limite. Que le point donné soit désigné par P, et soit C le centre du cercle donné. Si P est au dehors du cercle donné, le problème est toujours possible et susceptible de deux solutions. Soit P en dedans du cercle donné. La plus petite valeur du côté passant par P est la perpendiculaire à la droite CP qui joint le point donné avec le centre du cercle donné. Partout, si l'angle

formé par les deux autres côtés doit être aigu, cet angle est alors le plus petit; et au contraire, si cet angle doit être obtus, il est alors le plus grand. Lorsque le problème est possible et qu'il n'est pas dans le cas de la limite, il est susceptible de deux solutions. Que l'angle donné soit droit; le problème a une seule solution, si le point donné P ne coïncide pas avec le centre du cercle donné; et il est indéterminé, si le point P coïncide avec le centre du cercle donné.

Troisième problème. A un cercle donné inscrire un triangle dont deux des côtés passent par des points donnés de position, et dont le troisième côté soit parallèle à une droite donnée de position.

FIG. 101. Soit C le centre d'un cercle donné, et soit R son rayon. Pour abréger, que ce cercle soit désigné par C. R. Soient P et P′ deux points donnés de position. Soit XX′X″ un triangle cherché inscrit au cercle C. R. Que les côtés XX′, X′X″, passent par les points donnés P et P′, et que le côté X″X soit parallèle à une droite donnée de position, on demande ce triangle.

Analyse. Par X soit conçue à PP′ une parallèle, qui rencontre de nouveau en x′ la circonférence du cercle donné, et que X″x′ rencontre PP′ en p′. A cause du parallélisme des droites Xx′, PP′, les angles p′ et x′ sont égaux entr'eux; mais les angles dans le même segment X′ et x′ sont aussi égaux entr'eux; donc, les angles p′ et X′ sont égaux entr'eux, et les triangles équiangles X″P′p′, PP′X′ ont leurs côtés proportionnels, et en particulier, $PP' : X''P' = P'X' : P'p'$; donc, $X''P' \times P'X' = PP' \times P'p'$; mais le point P′ est donné de position sur le plan du cercle C. R; donc, le rectangle $X''P' \times P'X'$ est donné de grandeur; donc aussi, le rectangle $PP' \times P'p'$ est donné de grandeur; mais la droite PP′ est donnée de grandeur; donc, la droite P′p′ est aussi donnée de grandeur, et le point p′ est donné de position. Donc, dans le triangle Xx′X″ le côté XX″ est parallèle à une droite donnée de position, le côté Xx′ est aussi parallèle à une droite PP′ donnée de position, et le côté x′X″ passe par un point donné p′; donc, ce troisième problème est ramené au second.

Construction. Soit changé le rectangle des parties d'une droite menée par P′ et terminée de part et d'autre à la circonférence, en un rectangle ayant PP′ pour un de ses côtés; que l'autre côté soit porté sur PP′ prolongée de P′ en p′. Puis (second problème) soit inscrit au cercle donné un triangle Xx′X″ dont le côté XX″ soit parallèle à la droite donnée de position, dont le côté Xx′ soit parallèle à la droite PP′ donnée de position, et dont le côté x′X″ passe par le point donné p′; soit menée X″P′ qui rencontre la circonférence en X′; j'affirme que la droite XP rencontrera la droite X″P′ au même point.

Que la droite XP rencontre, s'il est possible, la droite X″P′ en un point x

différent du point X'. Par les triangles semblables X''P'p', PP'x, X''P'×P'x =PP'×P'p'= (constr.) X''P'×P'X'; donc P'x=P'X'; donc les points x et X' coïncident.

Remarque. Puisque le problème troisième est ramené au second, on doit lui appliquer les observations qui ont été faites sur celui-ci, relatives à sa possibilité ou à son impossibilité, à son indétermination, et à la double solution dont il est susceptible.

Problème quatrième. A un cercle donné inscrire un triangle dont les côtés passent par trois points donnés de position.

Soient P, P', P'', trois points donnés de position, sur le plan d'un cercle donné C. R. Inscrire à ce cercle un triangle XX'X'' dont les côtés XX', X'X'', X''X passent respectivement par les points donnés P, P', P''.

Ce problème quatrième est ramené au troisième, de la même manière que le troisième a été ramené au second. En effet, que Xx' parallèle à PP' rencontre en x' la circonférence du cercle C. R, et que X''x' rencontre PP' en p': on montrera, comme dans le troisième problème, que le point p' est donné de position. Partant, dans le triangle Xx'X'' le côté Xx' est parallèle à la droite PP' donnée de position; et les côtés x'X'', X''X, passent respectivement par les points donnés p' et P''; donc, le quatrième problème est ramené au troisième.

Construction. Soit prolongée PP' en p' de manière que le rectangle PP'×P'p' soit égal au rectangle des parties d'une droite menée par P' comprises entre ce point et la circonférence. Au cercle proposé soit inscrit un triangle Xx'X'' dont le côté Xx' soit parallèle à la droite PP', et dont les côtés x'X'', X''X, passent par les points donnés p' et P''; soient menées les droites XP et X''P', elles se couperont en X' sur la circonférence du cercle.

La démonstration ne diffère en rien de celle du second problème.

Remarque 1.re Il suit de là, que le problème dans lequel deux des côtés doivent être parallèles à des droites données de position, et le troisième côté doit passer par un point donné, est le problème fondamental auquel se ramènent successivement ceux dans lesquels deux des côtés, ou les trois côtés, doivent passer par des points donnés de position; et partant, on peut faire sur ces deux derniers problèmes les observations qui ont été faites sur le premier, relativement à leur impossibilité, à leur indétermination, et aux cas où ils sont susceptibles d'une seule ou d'une double solution. Puisque le premier de ces problèmes est ramené à la question très-simple: à un cercle donné inscrire une corde de grandeur donnée qui passe par un point donné; c'est aussi de la solution de ce dernier problème que dépendent les solutions des trois derniers problèmes proposés.

Digitized by Google

Remarque 2.° Le quatrième des problèmes proposés a occupé un grand nombre de Mathématiciens. PAPPUS le résout dans ses collections mathématiques pour le cas particulier dans lequel les trois points donnés de position (par lesquels les trois côtés du triangle cherché doivent passer) sont en ligne droite.

M. GABRIEL CRAMER (mon illustre compatriote et l'un de mes prédécesseurs dans la chaire des mathématiques, connu en particulier par son *Introduction à l'analyse des lignes courbes*), généralisa ce problème pour une position quelconque des trois points donnés; et il le proposa sous cette forme à Mr. de CASTILLON. Celui-ci, après s'en être occupé à diverses reprises, en a donné une solution géométrique, dans les Mémoires de Berlin pour 1776. On regretteroit la longueur de son procédé, si les lemmes qu'il lui donne lieu de développer n'étoient pas intéressans par eux-mêmes.

Mr. DE LA GRANGE n'a pas dédaigné de s'occuper aussi de ce problème, quoique purement élémentaire; aussitôt qu'il connut la solution géométrique de M. de CASTILLON, il lui en remit une solution algébrique remarquable par sa simplicité et par son élégance. Ce problème a encore occupé le grand EULER et ses illustres disciples FUSS et LEXELL, qui en ont donné des solutions plus ou moins algébriques dans les Mémoires de Pétersbourg.

Le procédé géométrique que j'ai exposé est conforme à deux Mémoires contenus dans la collection intitulée, *Memorie di Fisica e di mathematica della societa italiana*, T. IV; l'un de ces Mémoires a pour auteur un jeune Napolitain, nommé ANNIBALE GIORDANO DI OTTAÏANO, lequel résout non-seulement le problème relatif au triangle pour une position quelconque des points par lesquels doivent passer ses côtés; mais encore le problème général, relatif à l'inscription à un cercle donné d'un polygone dont les côtés passent par des points donnés. Le second de ces Mémoires est du célèbre MALFATTI, qui travailla de son côté sur le même sujet, après avoir appris le succès de ce premier Mathématicien, et qui parvint au même but par un procédé peu différent. En profitant du travail de ces deux Mathématiciens, je me suis permis de faire de légers changemens dans l'ordre et dans la distribution de ce sujet.

L'application générale de la méthode des coordonnées aux problèmes précédens me paroît conduire à des expressions trop compliquées, soit dans la recherche, soit dans les résultats, pour qu'il me paroisse convenable de suivre ce procédé. Le procédé de LA GRANGE me paroît le plus simple, et c'est celui que je vais exposer.

Lemme. Soit un triangle isoscèle du sommet duquel on mène une droite à un point

point de la base. J'affirme que le côté du triangle est à la droite menée, comme le cosinus de la demi-différence des angles au sommet formés par la droite menée, est au cosinus de leur demi-somme ou du demi-angle au sommet.

Soit ACA′ un triangle isoscèle, dont la base est AA′ et le sommet C; soit menée une droite CP à un point P de la base AA′. J'affirme que AC : CP $= \cos. \frac{ACP-A'CP}{2} : \cos. \frac{1}{2}C.$

Soit CB perpendiculaire à AA′; AC : CP = sin. P : sin. A. Or, sin. P $= \cos. BCP = \cos. \frac{ACP-A'CP}{2}$; et sin. A = cos. ACB = cos. $\frac{1}{2}$C; donc, AC : CP $= \cos. \frac{ACP-A'CP}{2} : \cos. \frac{1}{2}C.$

Lorsque le point P est sur AA′ prolongée, on a de même,
AC : CP = cos. $\frac{ACP+A'CP}{2} : \cos. \frac{1}{2}C.$

Corollaire. AC+CP : AC − CP = cos. $\frac{1}{2}$ ACP cos. $\frac{1}{2}$ A′CP : sin. $\frac{1}{2}$ ACP sin. $\frac{1}{2}$ A′CP = 1 : tang. $\frac{1}{2}$ ACP tang. $\frac{1}{2}$ A′CP, savoir; la somme d'un des côtés égaux d'un triangle isoscèle et d'une droite menée de son sommet à un des points de la base, est à leur différence, comme le carré du rayon est au produit des tangentes des moitiés des angles que la droite menée fait avec les côtés égaux du triangle.

Première application. Inscrire à un cercle donné un triangle dont deux des côtés soient parallèles à des droites données de position, et dont l'autre côté passe par un point donné.

Soit XX′X″ le triangle cherché; que les côtés X″X et X″X′ soient parallèles à des droites données de position, et que le côté XX′ passe par un point donné P. Fig. 101.

Soient CP′ et CP″ perpendiculaires aux côtés X′X″, X″X; les angles PCP′, P′CP″, P″CP sont donnés. Que les angles PCP′, P′CP″, P″CP, soient désignés par ϕ, ϕ', ϕ'', respectivement. Soit P′CX″ = P′CX′ = x; PCX′ = ϕ − x; P″CX″ = P″CX = ϕ' − x; XCP = $\phi''-\phi'+x$; XCX′ = $\phi''-\phi'+\phi$; XCP − X′CP = $2x-(\phi-\phi''+\phi')$; $\frac{XCP-X'CP}{2} = x - \frac{\phi\ \phi''+\phi'}{2}$. Soit CP = a. On a la proportion,

$$r : a = \cos.\left(x-\frac{\phi-\phi''+\phi'}{2}\right) : \cos.\frac{\phi''-\phi'+\phi}{2};$$

donc, $\cos.\left(x-\frac{\phi-\phi''+\phi'}{2}\right) = \frac{r}{a}\cos.\frac{\phi''-\phi'+\phi}{2}$.

Or, $\frac{\phi+\phi''+\phi'}{2} = 2D$; donc $\frac{\phi-\phi''+\phi'}{2} = 2D-\phi''$

et $\frac{\phi''-\phi'+\phi}{2} = 2D-\phi'$.

Digitized by Google

Donc, $r : a = \cos.(x-(2D-\phi'')) : \cos.(2D-\phi')$
$= \cos.(x+\phi'') \quad : \cos.\phi'$. Donc l'angle $x+\phi''$ est connu par l'équation, $\cos.(x+\phi'') = \frac{r}{a}\cos.\phi'$.

Puisque le troisième et le quatrième problème ont été ramenés au précédent, on pourroit les regarder comme étant aussi résolus algébriquement ; mais on peut aussi les résoudre immédiatement, ainsi que je vais le faire pour le quatrième.

Seconde application. Soient P, P′, P″, les points par lesquels doivent passer les côtés XX′, X′X″, X″X. Soit $PCX' = x$, $P'CX'' = x'$, $P''CX = x''$. $X'CP' = \phi - x$; $X''CP'' = \phi' - x'$; $XCP = \phi'' - x''$.

Soient CP, CP′, CP″, désignées par a, a′, a″, respectivement.

On a les trois équations ; $\text{tang.}\frac{1}{2}x\,\text{tang.}\frac{\phi''-x''}{2} = \frac{r-a}{r+a}$.

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}x'\,\text{tang.}\frac{\phi-x}{2} = \frac{r-a'}{r+a'}.$$

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}x''\,\text{tang.}\frac{\phi'-x'}{2} = \frac{r-a''}{r+a''}.$$

Il est facile d'obtenir une seule équation à une inconnue, au moyen de la formule, $\text{tang.}(a-b) = \frac{\text{tang.}\,a - \text{tang.}\,b}{1+\text{tang.}\,a\,\text{tang.}\,b}$.

§ 147.

Problème. Inscrire à un cercle donné un quadrilatère dont les côtés soient respectivement parallèles à des droites données de position, ou passent par des points correspondans donnés de position.

Ce problème donne lieu à cinq problèmes particuliers, comme il suit.

1.° Les quatre côtés sont parallèles à des droites données de position.

2.° Trois des côtés sont parallèles à des droites données de position, et le quatrième côté passe par un point donné.

3.° Deux des côtés sont parallèles à des droites données de position, et les deux autres côtés passent par des points donnés correspondans.

4.° Un des côtés est parallèle à une droite donnée de position, et les trois autres côtés passent par des points donnés correspondans.

5.° Les quatre côtés passent par des points donnés correspondans.

Problème 1.er Inscrire à un cercle donné un quadrilatère dont les côtés sont respectivement parallèles à des droites données de position.

Ce premier problème relatif aux quadrilatères, se distingue du problème correspondant relatif aux triangles, en ce que le premier de ces problèmes

(s'il est possible) est susceptible d'un nombre illimité de solutions, tandis que le problème relatif aux triangles est déterminé.

En effet, pour que le problème proposé soit possible, les angles donnés du quadrilatère doivent être tels que la somme des angles opposés vaille deux droits, ou que les sommes des angles alternatifs soient égales entr'elles. J'affirme que lorsqu'on a un quadrilatère inscrit à un cercle, on peut lui inscrire un nombre illimité de quadrilatères équiangles au premier.

Soit $XX'X''X'''$ un quadrilatère inscrit à un cercle, et soit $YY'Y''Y'''$ un autre quadrilatère dont les côtés YY', $Y'Y''$, $Y''Y'''$, sont respectivement parallèles aux côtés XX', $X'X''$, $X''X'''$, du premier; j'affirme que le côté restant $Y'''Y$ est aussi parallèle au côté restant $X'''X$. FIG. 102.

En effet, à cause du parallélisme les angles X' et Y' sont égaux entr'eux; mais les angles X''' et Y''' sont respectivement les supplémens des angles X' et Y'; donc, les angles X''' et Y''' sont aussi égaux entr'eux; mais les jambes $X''X'''$, et $Y''Y'''$ de ces angles sont parallèles entr'elles; donc aussi, les droites $X'''X$ et $Y'''Y$ sont parallèles entr'elles. Partant, si on a pu inscrire à un cercle un quadrilatère dont les côtés sont respectivement parallèles à des droites données de position, le nombre de ces quadrilatères est illimité. Pour que le problème soit déterminé, on doit ajouter aux conditions énoncées quelqu'autre condition indépendante des premières, relative par exemple à la grandeur du contour ou de la surface du quadrilatère.

Problème 2.e Inscrire à un cercle donné un quadrilatère dont trois des côtés soient parallèles à des droites données de position, et dont le quatrième côté passe par un point donné.

Soit $XX'X''X'''$ un quadrilatère inscrit à un cercle donné dont le rayon est R et le centre C. Que le côté XX' passe par un point donné P; et que les côtés restans $X'X''$, $X''X'''$, $X'''X$, soient parallèles à des droites données de position: on demande ce quadrilatère.

Analyse. A cause de l'inscription au cercle, les angles X'' et X sont l'un le supplément de l'autre; mais, l'angle X'' est donné; donc, l'angle X est aussi donné; mais la droite $X'''X$ est supposée parallèle à une droite donnée de position; donc, la droite XX' est aussi parallèle à une droite donnée de position; mais, cette droite XX' passe par le point donné P; donc, la droite XX' est donnée de position.

Construction. Du point P soit menée une droite faisant avec la droite à laquelle $X'''X$ est parallèle un angle (intérieur) égal au supplément de l'angle X. Si cette droite rencontre le cercle donné, la partie comprise dans ce cercle est le côté cherché du quadrilatère demandé.

Digitized by Google

Remarque. Le problème est possible lorsque le point P est en dedans du cercle donné. Soit P au dehors du cercle donné, le problème est impossible lorsque la perpendiculaire abaissée du centre C sur la droite menée par P est plus grande que le rayon du cercle donné.

Problème 3.° Inscrire à un cercle donné un quadrilatère dont deux des côtés soient parallèles à des droites données de position, et dont les deux autres côtés passent par des points donnés.

Ce problème donne lieu à deux cas, suivant que les côtés qui passent par les points donnés sont adjacens l'un à l'autre, ou sont opposés l'un à l'autre. Mais, comme mon but principal est de m'acheminer vers le cinquième problème dont la solution dépend du premier de ces cas; il me suffira de développer ce premier cas seulement.

FIG. 103. Soit $XX'X''X'''$ un quadrilatère à inscrire au cercle C. R. Que les côtés XX', $X'X''$ pasent par les points donnés P, P'; et que les côtés $X''X'''$, $X'''X$ soient parallèles à des droites données de position; on demande ce quadrilatère.

Ce troisième problème sur les quadrilatères est ramené au second, de la même manière que le troisième problème sur les triangles a été ramené au second. Savoir par X soit menée à PP' une parallèle qui rencontre de nouveau la circonférence en x'; soit menée $X''x'$ qui rencontre en p' la droite PP'. Le point p' est déterminé par l'équation $X''P' \times P'X' = PP' \times P'p'$; et partant, dans le quadrilatère $Xx'X''X'''$, le côté $x'X''$ passe par le point donné p', et les côtés $X''X'''$, $X'''X$, Xx', sont parallèles à des droites données de position; donc, le troisième problème est ramené au second.

Problème 4.° Inscrire à un cercle donné un quadrilatère dont trois des côtés passent par des points donnés, et dont le quatrième côté soit parallèle à une droite donnée de position.

Solution. Ce quatrième problème est ramené au troisième, de la même manière que celui-ci a été ramené au second.

Problème 5.° Inscrire à un cercle donné un quadrilatère dont les quatre côtés passent chacun par un point donné correspondant.

Solution. Ce problème cinquième est ramené au quatrième, de la même manière que celui-ci a été ramené au troisième.

Remarque. Il suit de là; que les problèmes proposés, à cómpter depuis le second inclusivement, dans lesquels on augmente successivement d'une unité le nombre des côtés qui passent par des points donnés, sont ramenés aux problèmes précédens, dans lesquels le nombre des côtés qui passent par des points donnés est successivement moindre d'une unité; et en particulier, que les trois derniers

derniers problèmes dépendent du second, et sont ramenés à lui. Partant, les problèmes proposés sur le quadrilatère (excepté le premier qui, s'il est possible, est indéterminé) sont ramenés à la question simple; par un point donné mener une parallèle à une droite donnée; et le problème proposé est possible ou impossible, suivaot que cette parallèle rencontre la circonférence du cercle donné ou ne la rencontre pas; tandis que les problèmes sur les triangles (excepté le premier) sont ramenés à la question simple; par un point donné, inscrire à un cercle donné une corde de grandeur donnée.

La solution algébrique des problèmes précédens sur les quadrilatères, est tout à fait conforme à celle des problèmes relatifs aux triangles. Je vais esquisser les solutioos du second et du cinquième de ces problèmes.

Soient CP′, CP″, CP‴, perpendiculaires aux côtés X′X″, X″X‴, X‴X, et que le côté XX′ passe par le point P.

Que les angles PCP′, P′CP″, P″CP‴, P‴CP soient désignés par ϕ, ϕ', ϕ'', ϕ''', respectivement.

Soit PCX′ $= x$; $X'CP' = P'CX'' = \phi - x$

$$X''CP'' = P''CX''' = \phi' - \phi + x$$

$$X'''CP''' = P'''CX = \phi'' - \phi' + \phi - x$$

$$XCP = \phi''' - \phi'' + \phi' - \phi + x.$$

Soit CP $= a$. Dans le triangle isoscèle XCX′, on a l'équation,

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}x \text{ tang. } \frac{\phi''' - \phi'' + \phi' - \phi + x}{2} = \frac{r-a}{r+a};$$

ou, $$\text{sin. } \tfrac{1}{2}x \text{ sin. } \frac{\phi''' - \phi'' + \phi' - \phi + x}{2} : \text{cos. } \tfrac{1}{2}x \text{ cos. } \frac{\phi''' - \phi'' + \phi' - \phi + x}{2} = r-a : r+a;$$

de là, $$\text{cos. } \frac{\phi''' - \phi'' + \phi' - \phi}{2} : \text{cos. } \left(\frac{\phi''' - \phi'' + \phi' - \phi}{2} + x\right) = r : a.$$

Dooc, $$\text{cos. } \left(\frac{\phi''' - \phi'' + \phi' - \phi}{2} + x\right) = \frac{a}{r} \text{ cos. } \frac{\phi''' - \phi'' + \phi' - \phi}{2}.$$ Partant, dans le second problème on connoît l'angle $\frac{\phi''' - \phi'' + \phi' - \phi}{2} + x$; et partant, aussi l'angle x ou PCX.

Je passe à esquisser la solution immédiate du cinquième problème; dans lequel les côtés du quadrilatère demandé doivent passer par les points donnés P, P′, P″, P‴.

Soient CP, CP′, CP″, CP‴, désignées par a, a', a'', a''', respectivement,

Que les angles PCX′, P′CX″, P″CX‴, P‴CX, soient désignés par

x, x', x'', x''' respectivement.

Les angles X'CP', X''CP'', X'''CP''', XCP, sont respectivement $\phi-x$, $\phi'-\phi+x$, $\phi''-\phi'+\phi-x$, $\phi'''-\phi''+\phi'-\phi+x$. On a les quatre équations, $\text{tang.}\frac{\phi-x}{2}\,\text{tang.}\,\frac{1}{2}x' = \frac{r-a'}{r+a'}$

$$\text{tang.}\frac{\phi'-\phi+x}{2}\,\text{tang.}\,\frac{1}{2}x'' = \frac{r-a''}{r+a''}$$

$$\text{tang.}\frac{\phi''-\phi'+\phi-x}{2}\,\text{tang.}\,\frac{1}{2}x'' = \frac{r-a'''}{r+a'''}$$

$$\text{tang.}\frac{\phi'''-\phi''+\phi'-\phi+x}{2}\,\text{tang.}\,\frac{1}{2}x = \frac{r-a}{r+a}.$$

Ces quatre équations à quatre inconnues sont ramenées à une seule équation à une inconnue, d'après les formules, $\text{tang.}(a\pm b) = \frac{\text{tang. } a \pm \text{tang. } b}{1 \mp \text{tang. } a\,\text{tang. } b}$.

Scholie. Les exercices contenus dans ce chapitre pouvant être regardés comme des accessoires, liés à la vérité avec le sujet de cet ouvrage, mais qui n'en font pas l'objet principal : je ne crois pas devoir examiner en détail tous les cas auxquels donnent lieu les positions soit des points donnés, soit des droites données, ni poursuivre les conséquences de ces positions sur la possibilité ou l'impossibilité de la question proposée, sur sa déterminstion ou sur son indétermination. Qu'il me suffise d'en alléguer un seul exemple. Que deux des côtés du quadrilatère proposé doivent être parallèles à une même droite donnée de position, et que les deux autres côtés doivent passer par des points donnés. Ce cas est aisément résolu comme il suit. Soit mené le diamètre perpendiculaire à la droite donnée de position; d'un des points donnés, soit abaissée sur ce diamètre une perpendiculaire; et soit prolongée cette perpendiculaire d'une quantité égale à elle-même; la droite qui joint l'extrémité de ce prolongement avec l'autre des points donnés, est un des côtés (non parallèles entr'eux) du quadrilatère cherché. Pour que le problème soit déterminé, l'extrémité du prolongement de la perpendiculaire abaissée de l'un des points donnés ne doit pas coïncider avec l'autre des points donnés. Lorsque cette coïncidence a lieu, le problème proposé a un nombre illimité de solutions; et il est impossible, lorsque les points donnés sont sur une même parallèle à la droite donnée de position, et que leurs distances au diamètre perpendiculaire à la même droite ne sont pas égales entr'elles.

§ 148.

Ce que j'ai dit dans les deux §§ précédens sur les triangles et sur les quadrilatères inscrits à un cercle donné, et dont les côtés sont parallèles à des droites

données de position ou passent par des points donnés, s'applique avec la plus grande facilité à l'inscription au cercle des polygones d'un nombre quelconque de côtés sous les mêmes conditions.

Et d'abord, il est nécessaire de diviser à cet égard les polygones en deux classes, suivant que le nombre de leurs côtés est impair ou qu'il est pair.

Premier cas. Que le nombre des côtés du polygone soit impair.

Premier problème. Inscrire à un cercle donné un polygone impair dont les côtés soient parallèles à des droites données de position.

Analyse. Puisque les côtés du polygone cherché sont parallèles à des droites données de position, chacun des angles de ce polygone est donné.

Soit $XX'X''X'''\ldots X^{2n-1}X^{2n}$ le polygone demandé, dont le nombre des côtés est $2n+1$, et qui est inscrit à un cercle dont le centre est C.

$$X'' = 2D-\tfrac{1}{2}X'CX'''$$
$$X^{IV} = 2D-\tfrac{1}{2}X'''CX^{V}$$
$$X^{VI} = 2D-\tfrac{1}{2}X^{V}CX^{VII}$$

$$X^{2n} = 2D-\tfrac{1}{2}X^{2n-1}CX$$
$$X''+X^{IV}+X^{VI}+\ldots+X^{2n} = n\times 2D-\tfrac{1}{2}(4D-XCX')$$
$$= (n-1)\,2D+\tfrac{1}{2}XCX';$$

Donc, $\tfrac{1}{2}XCX' = X''+X^{IV}+X^{VI}+\ldots+X^{2n}-(n-1)\,2D.$

Partant, chacun des angles au centre du polygone, opposé à ses côtés, est déterminé; donc, le polygone est déterminé. Savoir, la moitié de l'angle au centre opposé à l'un des côtés, est égal à l'excès de la somme des angles alternatifs du polygone, à compter depuis les deux angles les plus voisins des extrémités de ce côté, sur deux droits pris autant de fois qu'il y a de sommets alternatifs.

Second problème. Inscrire à un cercle donné un polygone impair dont tous les côtés excepté un soient parallèles à des droites données de position, et dont le côté restant passe par un point donné.

Tout étant posé comme dans le premier problème, soit XX' le côté qui passe par le point donné. Les angles restans du polygone X'', $X'''\ldots X^{2n-1}$, X^{2n}, sont connus; et partant, l'angle XCX' est connu; donc, l'arc et la corde XX' sont connus; et le problème proposé se ramène à cet autre; par un point donné sur le plan d'un cercle donné mener une droite dont la partie comprise dans ce cercle soit de grandeur donnée.

Digitized by Google

Je ne crois pas devoir répéter ici ce qui a été dit dans les deux §§ précédens, sur la possibilité ou l'impossibilité de la question ; sur l'indétermination dont elle est susceptible, et sur sa solution simple ou double.

On peut ramener à ce second problème ceux dans lesquels le nombre des côtés (adjacens) qui passent par des points donnés est deux ou plus grand que deux. Soient deux côtés adjacens XX' et $X'X''$ qui passent par les points donnés P et P' ; par X soit menée à PP' une parallèle qui rencontre de nouveau la circonférence en x' ; et que $X''x'$ rencontre PP' en p' ; le point p' est déterminé par l'équation $X''P' \times P'X' = PP' \times P'p'$; et les côtés XX' et $X'X''$ sont remplacés par les côtés Xx' et $X'X''$, dont le premier est parallèle à la droite donnée PP', et dont le second passe par le point donné p'. Par cette réduction, on diminue successivement d'une unité le nombre des côtés qui passent par des points donnés, et on leur substitue des côtés qui sont parallèles à des droites données de position.

Second cas. Que le nombre des côtés du polygone soit pair.

Premier problème. Inscrire à un cercle donné un polygone pair dont les côtés sont parallèles à des droites données de position.

Puisque dans un polygone pair inscrit au cercle les sommes des angles alternatifs sont égales entr'elles ; pour que le problème soit possible, chacune de ces sommes doit être égale à la moitié de la somme des angles du polygone qui est déterminée par le nombre de ses côtés. Lorsque cette condition est remplie, le problème est possible, et susceptible d'un nombre illimité de solutions. La démonstration pour les polygones d'un nombre pair quelconque de côtés, est exactement la même que pour les quadrilatères. Pour que le problème devienne déterminé, on doit ajouter quelque condition indépendante de la première, et relative, par exemple, à la connoissance du contour, ou à celle de la surface.

Second problème. A un cercle donné inscrire un polygone pair dont les côtés, excepté un, soient parallèles à des droites données de position ; et dont le côté restant passe par un point donné.

Soit XX' le côté qui doit passer par le point donné P.

Chacun des angles sur le côté XX', par exemple l'angle X', est déterminé par les autres angles qui lui sont alternatifs ; mais la jambe $X'X''$ de cet angle est parallèle à une droite donnée de position ; donc, le côté XX' est aussi parallèle à une droite donnée de position ; mais ce côté passe par le point donné P, donc ce côté est donné de position.

On ramène à ce second problème tous les autres problèmes sur les polygones pairs, dans lesquels deux ou un plus grand nombre de côtés adjacens passent par

par des points donnés. Savoir, on substitue successivement à l'un de ces côtés un autre côté qui soit parallèle à une droite donnée de position, de la même manière qu'on l'a fait pour les polygones impairs, et l'autre de ces côtés est déterminé à passer par un autre point donné.

L'exposition du procédé algébrique du problème général sur les polygones d'un nombre quelconque de côtés, est tout à fait conforme à celle du procédé qui a été suivi pour les triangles et pour les quadrilatères. Je l'ai développé dans un Mémoire imprimé dans le Recueil de l'Académie de Berlin pour 1796. Voyez aussi la Géométrie de position, pp. 383-387.

Scholie. Je crois devoir me contenter de cette exposition sommaire de la solution du problème proposé, sans entrer dans l'examen détaillé de tous les cas auxquels il donne lieu; je me contenterai d'énoncer un exemple remarquable de l'influence des positions des points donnés, sur la détermination de la question proposée. Soit un hexagone inscrit à un cercle; les points de rencontre des côtés opposés sont sur une même droite; et partant, si ces points de rencontre sont les points donnés par lesquels les côtés doivent passer; pour que le problème soit possible, ces trois points doivent être en ligne droite. Voyez la traduction allemande des données d'Euclide par Schwab. Cette propriété du cercle s'étend aux sections coniques (Voyez la Géométrie de position, p. 452); et il est aisé de montrer son application à ces courbes, en les envisageant comme des projections du cercle.

§ 149.

Nous avons vu que les premiers des problèmes sur les polygones pairs proposés dans les deux derniers §§ sont indéterminés; et que pour les rendre déterminés on doit ajouter quelque condition indépendante des angles de ces polygones. Comme un nouvel exemple (à ajouter à tous ceux qui sont répandus dans cet ouvrage) de l'utilité de la doctrine du centre des moyennes distances, je vais résoudre les deux problèmes suivans.

A un cercle donné inscrire un polygone d'un nombre pair de côtés, dont les angles sont donnés, en connoissant ou son contour ou sa surface.

Je vais introduire par l'exemple du quadrilatère à la solution générale.

Premier problème. Soit $XX'X''X'''$ un quadrilatère dont les angles sont donnés et dont le contour est donné, à inscrire à un cercle donné, dont le centre est C et dont le rayon est r. Fig. 104.

Soient CP, CP', CP'', CP''', les perpendiculaires abaissées du centre C sur les

côtés XX', X'X'', X''X''', X'''X. Que les angles donnés PCP', P'CP'', P''CP''', P'''CP, soient désignés par φ, φ', φ'', φ'''.

Soit $XCP = PCX' = x$; $XP = PX' = r \sin. x$

$X'CP' = P'CX'' = \varphi - x$ $X'P' = P'X'' = r \sin.(\varphi - x)$

$X''CP'' = P''CX''' = \varphi' - \varphi + x$ $X''P'' = P''X''' = r \sin.(\varphi' - \varphi + x)$

$X'''CP''' = P'''CX = \varphi'' - \varphi' + \varphi - x$. $X'''P''' = P'''X = r \sin.(\varphi'' - \varphi' + \varphi - x)$.

Partant, le demi-contour connu du quadrilatère a pour expression

Fig. 105. $r(\sin. x + \sin.(\varphi - x) + \sin.(\varphi' - \varphi + x) + \sin.(\varphi'' - \varphi' + \varphi - x)$. Sur une droite SA soit fait l'angle ASA' égal à l'angle φ; puis sur SA' du côté de SA soit fait l'angle $A'SA'' = \varphi'$; sur la droite SA'' du côté de SA' soit fait l'angle A''SA''' égal à l'angle φ''; soit l'angle ASX égal à l'angle x; les angles A'SX, A''SX, A'''SX, seront respectivement égaux aux angles $\varphi - x$, $\varphi' - \varphi + x$, $\varphi'' - \varphi' + \varphi - x$. Que les droites SA, SA', SA'', SA''', soient faites toutes égales au rayon r, et soient AP, A'P', A''P'', A'''P''' perpendiculaires à SX; la somme des droites AP, A'P', A''P'', A'''P''', est le demi-contour donné; soient les droites AS, A''S, prolongées en a et en a'' de l'autre part du point S, de quantités égales à elles-mêmes, et soient ap, a''p'' perpendiculaires à SX; la somme des perpendiculaires ap, A'P', a''p'', A'''P''', toutes situées d'un même côté de SX, est le demi-contour donné. Soit Z le le centre des moyennes distances des points a, A', a'', A'''; et soit ZQ perpendiculaire à SX; la droite ZQ est le quart du demi-contour donné, et partant elle est donnée de grandeur; donc, la droite SX est tangente au cercle dont Z est le centre, et dont ZQ est le rayon.

De là, découle la construction suivante.

Sur une droite quelconque SA soit fait un angle $ASA' = \varphi$; sur SA', du côté de SA, soit fait l'angle $A'SA'' = \varphi'$; sur SA'' du côté de SA' soit fait l'angle $A''SA''' = \varphi''$. Soient prises les droites SA, SA', SA'', SA''' égales au rayon r du cercle donné. Soient AS et A''S prolongées en a et en a'' au-delà de S, de quantités égales à elles-mêmes. Soit cherché le centre Z des moyennes distances des points a, A', a'', A'''; du point Z comme centre avec un rayon égal au quart du demi-contour donné, soit décrite une circonférence de cercle; et du point S soit menée (s'il est possible) une tangente à ce cercle, elle sera la direction cherchée de la droite SX.

Limite. Si le point S est au dehors du cercle qui vient d'être décrit, le problème est susceptible de deux solutions; pour que le problème soit possible, le point S ne doit pas être en dedans de ce cercle; et partant, la plus grande valeur du quart du demi-contour est la distance du centre Z des moyennes distances au sommet commun S.

Digitized by Google

Dans ce cas, la somme des perpendiculaires abaissées des points a et a″ sur la droite SZ est égale à la somme des perpendiculaires abaissées sur la même droite depuis les points A′ et A‴; et partant, les sommes des perpendiculaires abaissées du centre sur les côtés opposés du quadrilatère sont égales entr'elles.

Item, dans le cas de la limite, on détermine chacun des angles aSZ, A′SZ, a″SZ, A‴SZ, et partant aussi, chacun des angles ACX, A′CX, A″CX, A‴CX, par l'équation,

$$a\,S\sin.\,aSZ + a''S\sin.\,a''SZ = A'S\sin.\,A'SZ + A'''S\sin.\,A'''SZ$$

$$\text{ou, } \sin.\,aSZ + \sin.\,a''SZ = \sin.\,A'SZ + \sin.\,A'''SZ.$$

$$\text{De là, } \cot.\,ASX = \frac{\sin.\,ASA' + \sin.\,ASA'' + \sin.\,ASA'''}{1 - \cos.\,ASA' + \cos.\,ASA'' - \cos.\,ASA'''}.$$

$$SZ^2 = rr\,(4 - 2\cos.\,ASA' + 2\cos.\,ASA'' - 2\cos.\,ASA''' - 2\cos.\,A'SA'' + 2\cos.\,A'SA''' - 2\cos.\,A''SA''').$$

D'après cet exemple, il est aisé de résoudre le problème général, inscrire à un cercle donné un polygone d'un nombre pair de côtés, dont les côtés soient respectivement parallèles à des droites données de position, et dont le contour soit donné de grandeur.

Soit C le centre du cercle donné, et r son rayon.

Soient X, X′, X″.... X^{2n-n}, X^{2n-1} les sommets successifs du polygone.

Soient CP, CP′, CP″.... CP^{n-n}, CP^{n-1}, des droites perpendiculaires aux côtés XX′, X′X″, X″X‴.... $X^{n-n}X^{n-1}$, $X^{n-1}X$.

Que les angles PCP′, P′CP″, P″CP‴.... $P^{n-n}CP^{n-1}$, $P^{n-1}CP$ soient désignés par φ, φ', φ''..... φ^{n-n}, φ^{n-1} respectivement.

Soit l'angle XCP = PCX′, par exemple, désigné par x

$$X'CP' = P'CX'' = \varphi - x$$

$$X''CP'' = P''CX''' = \varphi' - \varphi + x$$

$$X'''CP''' = P'''CX^{iv} = \varphi'' - \varphi' + \varphi - x$$

$$X^{2n-n}CP^{n-n} = P^{n-n}CX^{n-1} = \varphi^{n-m} - \varphi^{n-iv} \ldots + \varphi' - \varphi + x.$$

$$X^{n-1}CP^{n-1} = P^{n-1}CX = \varphi^{n-n} - \varphi^{n-m} \ldots - \varphi' + \varphi - x.$$

De là, le demi-contour donné a pour expression

$$r(\sin.x + \sin.(\varphi - x) + \sin.(\varphi' - \varphi + x) + \sin.(\varphi'' - \varphi' + \varphi - x) + \ldots + \sin.(\varphi^{n-m} - \varphi^{n-iv} + \ldots + \varphi' - \varphi + x) + \sin.(\varphi^{n-n} - \varphi^{n-m} \ldots - \varphi' + \varphi - x).$$

Soit menée une droite quelconque SA, et soient faits les angles ASA′, A′SA″, A″SA‴, A‴SA^{iv}.... $A^{n-m}SA^{n-n}$, $A^{n-n}SA^{n-1}$, égaux aux angles φ, φ', φ'', φ''' ..... φ^{n-m}, φ^{n-n} respectivement, en alter-

nant les deux sens suivant lesquels ces angles sont faits successivement. Que toutes les droites SA, SA', SA'', SA'''.... SA^{n-2}, SA^{n-1} soient faites égales au rayon r. Que l'angle ASX soit conçu égal à l'angle x; sur SX soient conçues abaissées les perpendiculaires AP, A'P', A''P'', A'''P''... $A^{n-2}P^{n-2}$, $A^{n-1}P^{n-1}$. Ces perpendiculaires seront respectivement les demi-côtés du polygone inscrit; et le demi-contour donné du polygone sera la somme

$$AP + A'P' + A''P'' + A'''P''' + ... + A^{n-2}P^{n-2} + A^{n-1}P^{n-1}.$$

Soient conçues les droites alternatives, AS, A''S, $A^{IV}S$. ... $A^{n-3}S$, $A^{n-1}S$, prolongées de l'autre côté du point S en a, a'', a^{IV}.... a^{n-3}, a^{n-1}; soit Z le centre des moyennes distances de tous les points a, A', a'', A''', a^{IV}, A^{V}.... a^{n-3}, A^{n-2}, a^{n-1}; soit ZQ perpendiculaire à SX; le demi-contour donné est nZQ; donc, la droite ZQ est donnée de grandeur; le point Q est à la circonférence d'un cercle dont le centre Z et le rayon ZY sont l'un et l'autre donnés; et la droite SX est une tangente à ce cercle menée du point donné S, et partant, elle est donnée de position.

La plus grande valeur du contour donné a lieu lorsque $n \times SZ$ est égale à ce demi-contour; et alors, les sommes des perpendiculaires abaissées du centre sur les côtés alternatifs sont égales entr'elles. On détermine la valeur du demi-contour dans le cas de la limite et les valeurs correspondantes de chaque côté, d'après la doctrine du centre des moyennes distances, en se conformant à ce qui a été fait pour le cas particulier du quadrilatère.

$$\text{On trouve cot. ASX} = \frac{\sin. ASA' + \sin. ASA'' + \sin. ASA''' + \ldots + \sin. ASA^{n-2} + \sin. ASA^{n-1}}{1 - \cos. ASA' + \cos. ASA'' - \cos. ASA''' \ldots + \cos. ASA^{n-2} - \cos. ASA^{n-1}}$$

$$nnSZ^2 = rr\,(n - 2\cos. ASA' + 2\cos. ASA'' - 2\cos. ASA''' \ldots + 2\cos. ASA^{n-2} - 2\cos. ASA^{n-1}$$
$$- 2\cos. A'SA'' + 2\cos. A'SA''' \ldots - 2\cos. A'SA^{n-2} + 2\cos. A'SA^{n-1}$$
$$- 2\cos. A''SA''' \ldots + 2\cos. A''SA^{n-2} - 2\cos. A''SA^{n-1}$$
$$\ldots$$
$$- 2\cos. A^{n-3}SA^{n-2} + 2\cos. A^{n-3}SA^{n-1}$$
$$- 2\cos. A^{n-2}SA^{n-1})$$

Second problème. Soit XX'X''X''' un quadrilatère, dont les angles sont donnés, et dont la surface est donnée, à inscrire à un cercle donné dont le centre est C et dont le rayon est r.

Tout étant posé comme dans le problème précédent.

Soit $XCX' = 2XCP = 2PCX' = x$.

$X'CX'' = 2\phi - x$.

$X''CX''' = 2\phi' - 2\phi + x$

$X'''CX = 2\phi'' - 2\phi' + 2\phi - x$,

Partant,

Partant, le double de la surface du quadrilatère est

$$rr\,(\sin. x+\sin.(2\phi-x)+\sin.(2\phi'-2\phi+x)+\sin.(2\phi''-2\phi'+2\phi-x).$$

Sur une droite SA soit fait l'angle ASA′ égal au double de l'angle ϕ; sur SA′ du côté de SA, soit fait l'angle A′SA″ double de l'angle ϕ'; puis sur SA″ soit fait du côté de SA′ l'angle A″SA‴ double de l'angle ϕ''; soit l'angle ASX égal à x; les angles A′SX, A″SX, A‴SX, seront respectivement égaux aux angles $2\phi-x$, $2\phi'-2\phi+x$, $2\phi''-2\phi'+2\phi-x$. Que les droites SA, SA′, SA″, SA‴, soient faites toutes égales au rayon r; soient AP, A′P′; A″P″, A‴P‴ perpendiculaires à SX; le double de la surface donnée du quadrilatère a pour expression $2r(AP+A'P'+A''P''+A'''P''')$; et partant, la somme des droites AP, A′P′, A″P″, A‴P‴ est donnée de grandeur. Que les droites AS et A″S soient prolongées en a et en a″ au-delà de S de quantités Sa, Sa″ égales à elles-mêmes, et soient ap et a″p″ perpendiculaires à SX; la somme $ap+A'P'+a''p''+A'''P'''$ est donnée de grandeur. Soit Z le centre des moyennes distances des points a, A′, a″, A‴; et soit ZQ perpendiculaire à SX; la somme $ap+A'P'+a''p''+A'''P'''$ quadruple de ZQ est donnée de grandeur; le point Q est à une circonférence donnée, et la droite SX tangente à cette circonférence et menée du point S est donnée de position.

Pour que le problème soit possible, la droite ZQ ne doit pas être plus grande que SZ; et partant, la plus grande valeur du double de la surface est $4r\times SZ$; et d'après la doctrine du centre des moyennes distances, on détermine tout comme dans le problème précédent relatif au contour, la plus grande valeur de la surface, et chacun des triangles du quadrilatère ayant pour sommet commun le centre du cercle, et ayant pour bases les côtés du quadrilatère.

Le procédé de la solution générale de ce second problème est tout à fait conforme au procédé de la solution du premier, en substituant aux angles simples $\phi, \phi', \phi'', \phi'''\ldots\phi^{n-n}, \phi^{n-1}$, leurs doubles; et en opérant sur ces angles doubles de la même manière qu'on a opéré sur les angles simples dans le problème relatif au contour.

Scholie. La solution algébrique des deux problèmes précédens peut aussi être ramenée à la solution d'une des deux équations $a\cos. x\pm b\sin. x=c$; mais le procédé que j'ai suivi me paroît plus lumineux; et sa liaison avec la doctrine du centre des moyennes distances m'a paru remarquable.

§ 150.

Problème. Soient des points en nombre quelconque donnés de position sur

un plan ; soient des coefficiens correspondans donnés de grandeur, et soit une droite donnée de position sur ce plan. Trouver sur cette droite un point duquel menant des droites aux points donnés la somme des espaces qui ont aux carrés de ces droites les rapports dont les exposans sont les coefficiens donnés, soit donnée de grandeur.

FIG. 106. Soient A, A′, A″.... A^n des points donnés de position.

Soient m, m′, m″.... m^n des exposans de rapports correspondans donnés de grandeur. Soit BB′ une droite donnée de position. On demande sur BB′ un point X tel que la somme $mAX^2 + m'A'X^2 + m''A''X^2 .... + m^nA^nX^2$ soit égale à un espace S donné de grandeur.

Analyse. Soit Z le centre des moyennes distances des points A, A′, A″.... A^n pour les coefficiens correspondans m, m′, m″.... m^n. On a (§ 41) $f.\ m^nA^nX^2 = f.\ m^nA^nZ^2 + ZX^2 f.\ m^n$; partant, $ZX^2 + \frac{f.\ m^nA^nZ^2}{f.\ m^n} = \frac{f.\ m^nA^nX^2}{f.\ m^n}$;

$$\text{ou } ZX^2 = \frac{S}{f.\ m^n} - \frac{f.\ m^nA^nZ^2}{f.\ m^n}.$$

Or, le point Z est donné de position ; donc, le point X est à une circonférence donnée dont on connoît le centre Z et le rayon ; mais le point X est aussi sur la droite BB′ donnée de position ; donc, le point X (s'il est possible) est déterminé.

Construction. Soit Z le centre des moyennes distances des points donnés A, A′, A″.... A^n pour les coefficiens donnés m, m′, m″.... m^n. Soit prise la somme $f.\ m^nA^nZ^2$ des espaces qui ont les rapports donnés aux carrés des distances de ce centre aux points donnés. L'espace donné S ne doit pas être plus petit que cette somme. Soit pris l'excès de l'espace S sur cette somme ; et soit déterminée la droite L telle que cet excès soit au carré de cette droite dans un rapport dont l'exposant est la somme des coefficiens donnés ou $f.\ m^n$. Du point Z comme centre, avec le rayon L, soit décrite une circonférence de cercle, qui rencontre (s'il est possible) en X la droite BB′. Le point X est le point cherché.

Démonstration. Elle découle de l'analyse.

Limite. Non-seulement l'espace S donné de grandeur ne doit pas être plus petit que $f.\ m^nA^nZ^2$; mais encore l'excès $\frac{1}{f.\ m^n}(S - f.\ m^nA^nZ^2)$, ne doit pas être plus petit que le carré de la perpendiculaire abaissée du point Z sur la droite BB′ donnée de position. Lorsque l'espace donné S est plus grand que celui qui répond à cette dernière limite, il y a sur la droite donnée deux points qui satisfont à la question, et partant le problème a deux solutions.

Remarque 1.re On détermine de même sur la circonférence d'un cercle donné le point qui résout la même question ; dans la supposition que le centre du cercle donné ne coïncide pas avec le centre des moyennes distances des points donnés pour les coefficiens donnés ; et on détermine sur la circonférence du cercle donné les points auxquels répondent la plus grande et la plus petite valeur de la somme des espaces proposés. Ces deux points sont les extrémités du diamètre qui passe par le centre Z des moyennes distances.

Remarque 2.e On détermine de même sur un plan donné ou sur une surface sphérique donnée la circonférence de cercle qui est le lieu des points, tels que la somme des espaces qui ont des rapports donnés aux carrés de leurs distances à des points donnés dans l'espace soit égale à un espace donné de grandeur ; et on détermine la limite de cet espace.

Remarque 3.e En particulier, que les points donnés de position A, A', A''...A^x soient sur une même droite BB' donnée de position. Le centre Z est sur la même droite. FIG. 107.

Puisque $ZX^2 f.\, m^x + f.\, m^x A^x Z^2 = S.$

ou, $ZX^2 + \frac{f.\, m^x A^x Z^2}{f.\, m^x} : S = 1 : f.\, m^x$; si du point Z on élève à BB' une perpendiculaire ZV dont le carré soit égal à $\frac{f.\, m^x A^x Z^2}{f.\, m^x}$; on aura $VX^2 : S = 1 : f.\, m^x$. On obtient ainsi la proposition suivante.

Porisme. Soient des points donnés de position sur une même droite ; et soient des exposans correspondans de rapports donnés de grandeur ; on peut déterminer en même tems la position d'un point, et l'exposant d'un rapport, qui répondent aux conditions suivantes : du point à déterminer soit menée une droite à un point quelconque de la droite donnée de position ; le carré de cette droite a un rapport constant (dont l'exposant est à déterminer) à la somme des espaces qui ont les rapports donnés aux carrés des distances des points donnés au point pris sur la droite. Savoir ; le point V se trouve en élevant à BB' depuis le point Z une perpendiculaire ZV telle que $ZV^2 = \frac{f.\, m^x A^x Z^2}{f.\, m^x}$; et l'exposant du rapport à déterminer est $f.\, m^x$.

Première application. Soient des droites en nombre quelconque données de position, et soit une autre droite aussi donnée de position. On peut déterminer sur cette dernière droite un point duquel abaissant des perpendiculaires sur les premières droites, la somme des espaces qui ont des rapports donnés aux carrés de ces perpendiculaires soit donnée de grandeur, et on peut déterminer la limite de cette somme.

FIG. 108. Que les premières droites rencontrent la dernière dans les points A, A', A''...A^{x} respectivement. Soit X le point cherché, et soient XY, XY', XY''....XY^{x} les perpendiculaires abaissées de ce point sur la droite donnée de position. Les expressions de ces perpendiculaires sont respectivement AX sin. A, A'X sin. A', A''X sin. A''.... A^{x}X sin. A^{x}. Partant, les points A, A', A''.... A^{x} étant donnés de position sur une même droite, on demande le point X tel que la somme mAX^{2} sin.^{2}A, m'A'X^{2} sin.^{2}A', m''A''X^{2}sin.^{2}A''.... m^{x}A^{x}X^{2}sin.^{2}A^{x} soit donnée de grandeur. Partant, on obtient le cas de la remarque troisième, une limite correspondante, et un porisme correspondant.

En particulier, la position du point Z auquel répond la plus petite valeur de la somme proposée se détermine par l'équation

$$mZA\sin.^{2}A + m'ZA'\sin.^{2}A' + m''ZA''\sin.^{2}A'' + \ldots + m^{x}ZA^{x}\sin.^{2}A^{x} = 0.$$

Or, $AZ\sin.A = ZY$; donc, $mZY\sin.A + m'ZY'\sin.A' + m''ZY''\sin.A'' + \ldots m^{x}ZY^{x}\sin.A^{x} = 0$.

De la première équation on tire

$$AZ = \frac{m'AA'\sin.^{2}A' + m''AA''\sin.^{2}A'' + \ldots + m^{x}AA^{x}\sin.^{2}A^{x}}{m\sin.^{2}A + m'\sin.^{2}A' + m''\sin.^{2}A'' + \ldots + m^{x}\sin.^{2}A^{x}};$$ et de là on tire la valeur de ZY, ou de AZ sin. A.

En particulier, que le nombre des premières droites soit deux, et que les coefficiens m, m' soient égaux entr'eux. On trouve,

$$AZ = \frac{AA'\sin.^{2}A'}{\sin.^{2}A + \sin.^{2}A'};\quad A'Z = \frac{AA'\sin.^{2}A}{\sin.^{2}A + \sin.^{2}A'},$$

Donc, $AZ : A'Z = \sin.^{2}A' : \sin.^{2}A$.

ou, $AZ\sin.A : A'Z\sin.A' = \sin.A' : \sin.A$.

Donc, $ZY : ZY' = \sin.A' : \sin.A$.

Seconde application. De là, on détermine sur le plan d'un triangle le point duquel abaissant des perpendiculaires sur ses côtés la somme de leurs carrés est la plus petite.

FIG. 109. En effet, que les sommets du triangle proposé soient A, A', A'', et que les perpendiculaires abaissées sur les côtés opposés soient ZY, ZY', ZY''; dans le cas du minimum de la somme des carrés ces perpendiculaires doivent être entr'elles comme les sinus des angles opposés, et partant aussi comme les côtés sur lesquels elles sont abaissées; on a donc $ZY : A'A'' = ZY' : AA'' = ZY'' : AA'$; et comme $ZY \times A'A'' + ZY' \times AA'' + ZY'' \times AA' = 2AA'A''$; on obtient $YZ^{2} + Y'Z^{2} + Y''Z^{2} : 2AA'A'' = 2AA'A'' : AA'^{2} + A'A''^{2} + A''A^{2}$; savoir, le double de la surface d'un triangle est moyen géométrique entre la somme des carrés

carrés des côtés et la plus petite somme des carrés des perpendiculaires abaissées sur les côtés de ce triangle.

En général, soient m, m', m'' des coefficiens donnés; la somme $mYZ^2 + m'Y'Z^2 + m''Y''Z^2$ est la plus petite, lorsque les quantités mYZ, $m'Y'Z$, $m''Y''Z$ sont entr'elles comme les côtés $A'A''$, $A''A$, AA', sur lesquels les perpendiculaires sont opposées.

On peut étendre cette doctrine aux polygones quelconques, et même aux polyhèdres. Je me contenterai, comme exemple, de déterminer le point dans l'espace duquel abaissant des perpendiculaires sur les faces d'un tétrahèdre la somme de leurs carrés est la plus petite; et de déterminer le minimum de cette somme.

Troisième application. Que les faces d'un tétrahèdre soit désignées par F, F', F'', F'''. Que l'angle planique, formé par deux faces telles que F et F', soit désigné par pp''; et soit admise la même symbolisation pour chaque paire de faces. Que les sommets du tétrahèdre opposés aux faces F, F', F'', F''' soient désignés par A, A', A'', A'''; et que les hauteurs du tétrahèdre, abaissées de ces sommets sur les faces opposées, soient désignées par H, H', H'', H'''.

Soit Z un point de la face F''' duquel on abaisse des perpendiculaires QZ, $Q'Z$, $Q''Z$ sur les faces F, F', F''; et soient YZ, $Y'Z$, $Y''Z$ les perpendiculaires abaissées du même point sur les bases des faces F, F', F''. Les perpendiculaires QZ, $Q'Z$, $Q''Z$, sont respectivement $YZ \sin. p'''p$, $Y'Z \sin. p'''p'$, $Y''Z \sin. p'''p''$; partant, dans le plan de la face F''' on doit avoir la plus petite valeur de la somme $YZ^2 \sin.^2 p'''p + Y'Z^2 \sin.^2 p'''p' + Y''Z^2 \sin.^2 p'''p''$. Cela a lieu, lorsqu'on a les équations $\frac{YZ \sin.^2 p'''p}{A'A''} = \frac{Y'Z \sin.^2 p'''p'}{AA''} = \frac{Y''Z \sin.^2 p'''p''}{AA'}$, ou

Fig. 110.

$$\text{les équations } \frac{QZ \sin. p'''p}{A'A''} = \frac{Q'Z \sin. p'''p'}{AA''} = \frac{Q''Z \sin. p'''p''}{AA'}.$$

Que les hauteurs des faces F, F', F'', abaissées depuis le sommet A''' sur les côtés de F''' qui sont les bases de ces faces, soient h, h', h'' respectivement.

$\text{Sin. } p'''p = \frac{H'''}{h}$, $\text{sin. } p'''p' = \frac{H'''}{h'}$, $\text{sin. } p'''p'' = \frac{H'''}{h''}$; donc, on a les équations

$$QZ \times \frac{1}{h \times A'A''} = Q'Z \times \frac{1}{h' \times AA''} = Q''Z = \frac{1}{h'' \times AA'};$$

et partant, $\frac{QZ}{F} = \frac{Q'Z}{F'} = \frac{Q''Z}{F''}$.

De là, pour un point quelconque dans l'espace on a les équations $\frac{QZ}{F} = \frac{Q'Z}{F'} = \frac{Q''Z}{F''} = \frac{Q'''Z}{F'''}$. Savoir, pour le point Z auquel répond la plus

petite somme des carrés des perpendiculaires abaissées sur les faces d'un tétraèdre, chaque perpendiculaire est directement proportionnelle à la face sur laquelle elle est abaissée. Cette condition suffit pour déterminer chacune de ces perpendiculaires.

En effet, $Q'Z = QZ \times \frac{F'}{F}$; $Q''Z = QZ \times \frac{F''}{F}$; $Q'''Z = QZ \times \frac{F'''}{F}$;

Soit C la capacité de la pyramide :

$$3C = QZ \times F + Q'Z \times F' + Q''Z \times F'' + Q'''Z \times F'''$$
$$= QZ\left(F + \frac{F'F'}{F} + \frac{F''F''}{F} + \frac{F'''F'''}{F}\right):$$

$$QZ = \frac{3CF}{FF + F'F' + F''F'' + F'''F'''} = H \times \frac{FF}{FF + F'F' + F''F'' + F'''F'''}.$$

Savoir, la perpendiculaire abaissée sur une des faces depuis le point auquel répond la somme la plus petite des carrés des perpendiculaires, est une quatrième proportionnelle à la somme des carrés des quatre faces, au carré de cette face, et à la hauteur de la pyramide considérée comme ayant cette face pour base.

Puisque $\frac{QZ}{F} = \frac{Q'Z}{F'} = \frac{Q''Z}{F''} = \frac{Q'''Z}{F'''}$;

$$\frac{QZ^2}{QZ \times F} = \frac{Q'Z^2}{Q'Z \times F'} = \frac{Q''Z^2}{Q''Z \times F''} = \frac{Q'''Z^2}{Q'''Z \times F'''}$$

et $\frac{QZ \times F}{F^2} = \frac{Q'Z \times F'}{F'^2} = \frac{Q''Z \times F''}{F''^2} = \frac{Q'''Z \times F'''}{F'''^2}$. De là,

$$\frac{QZ^2 + Q'Z^2 + Q''Z^2 + Q'''Z^2}{QZ \times F + Q'Z \times F' + Q''Z \times F'' + Q'''Z \times F'''} = \frac{QZ \times F + Q'Z \times F' + Q''Z \times F'' + Q'''Z \times F'''}{F^2 + F'^2 + F''^2 + F'''^2};$$

ou, $$\frac{QZ^2 + Q'Z^2 + Q''Z^2 + Q'''Z^2}{3C} = \frac{3C}{F^2 + F'^2 + F''^2 + F'''^2}.$$

Savoir, le triple de la capacité d'un tétraèdre est exprimé par la racine carrée du produit de la somme des carrés des quatre faces par la plus petite somme des carrés des perpendiculaires abaissées sur elles depuis un même point de l'espace.

Cette propriété des tétraèdres est tout à fait analogue à la propriété des triangles qui a été développée plus haut. On pourroit les obtenir au moyen des premiers principes des calculs supérieurs ; mais, il m'a paru intéressant de les développer d'une manière purement élémentaire, et de montrer leur liaison avec la doctrine du centre des moyennes distances, dont je crois avoir fait ressortir dans cet ouvrage l'importance et la fécondité des applications.

FIN.

608609

Biblioteca Nazionale NAPOLI

Digitized by Google

TABLE
DES
MATIÈRES.

AVANT-PROPOS.	pages.	§§
Dissertation préliminaire, sur le centre des moyennes distances	1-33	1-27
Introduction à la doctrine du centre des moyennes distances, par l'exemple de deux points	1-2	1
Définitions du centre des moyennes distances, et de l'excentre des moyennes distances, pour des coefficiens donnés	2-3	2
Détermination du centre des moyennes distances de trois points donnés. Ce centre est unique.	3-5	3
Propriétés des parallélogrammes relatives au centre des moyennes distances.	5-6	3
Détermination du centre des moyennes distances pour quatre points donnés sur un plan	6-7	4
Détermination du centre des moyennes distances d'un nombre quelconque de points donnés sur un plan; en supposant connu le centre des moyennes distances pour des points en nombre moindre que celui des points proposés.	7-8	5
Détermination immédiate du centre des moyennes distances d'un nombre quelconque de points donnés sur un plan	8-9	6
Applications particulières aux figures régulières, et aux figures qui ont un centre de figure	9-10	7
Equations relatives au centre des moyennes distances	10-11	8-10
Expression de la somme des espaces qui ont aux carrés des droites menées d'un nombre quelconque de points au centre de leurs moyennes distances, des rapports dont les exposans sont donnés, dans les carrés des distances de ces points entr'eux	11-12	11
Détermination du centre des moyennes distances de points donnés, dans sa distance à l'un de ces points, et dans sa position relativement à chacune des droites qui joignent ces points	12-13	12
Application à l'excentre des moyennes distances	13-15	13
Propriétés des figures rectilignes relatives au centre des moyennes distances .	15-16	14
Expression d'un côté d'une figure rectiligne dans les autres côtés et leurs inclinaisons au premier	16	15
Expression d'un côté d'une figure rectiligne dans les autres côtés et leurs inclinaisons entr'eux	17	15
Centre des moyennes distances d'une ligne droite, et d'un assemblage de lignes droites, puis d'une ligne courbe quelconque	18-19	16
Développement de la règle de GULDIN, relative aux surfaces de révolution .	19-20	16

Digitized by Google

	pages.	§§
Sur le centre des moyennes distances des points situés dans l'espace . . .	20-21	17
Applications particulières aux parallélipipèdes; expression de la diagonale d'un parallélipipède dans ses arrêtes et dans les angles qu'elles font avec elle; puis dans les arrêtes et dans les diagonales de ses faces; et enfin, dans ses arrêtes et dans les angles qu'elles forment entr'elles . . .	21-24	18
Détermination immédiate du centre des moyennes distances de points donnés dans l'espace	24-25	19
Expression de la somme des espaces qui ont aux carrés des distances du centre des moyennes distances à des points donnés des rapports dont les exposans sont les coefficiens correspondans donnés, dans les espaces qui ont des rapports donnés aux carrés des distances de ces points entr'eux . . . . :	25	20
Application à l'excentre des moyennes distances des points situés dans l'espace	25	21
Application aux polyhèdres des propriétés du centre des moyennes distances, et en particulier, exposition d'une face d'un polyhèdre dans les autres faces et leurs inclinaisons à elle; et dans les autres faces et leurs inclinaisons entr'elles	25-28	22
Développement de la règle de GULDIN relative à la capacité des solides engendrés par la révolution des figures planes. Application de cette règle .	28-33	23-25

CHAPITRE PREMIER.

Lieux à la ligne droite et à la circonférence du cercle traités géométriquement 35-93 26-46

PREMIERE PARTIE.

Lieux traités par APOLLONIUS, suivant SIMSON.

Définitions des lieux géométriques, relatifs aux lignes. Eclaircissemens tirés des lieux connus par les premiers élémens relatifs à la ligne droite et à la circonférence du cercle	35-37	26
	37-39	27
Sur les lieux plans d'APOLLONIUS, et en particulier sur l'ouvrage de R. SIMSON. Par un même point soient menées différentes droites. Sur chacune de ces droites soient prises depuis le même point des parties qui soient entr'elles dans un rapport donné; que l'extrémité d'une de ces parties soit à la circonférence d'un cercle donné, l'extrémité de l'autre partie est aussi à une circonférence donnée. Conséquences diverses de cette propriété du cercle. Liaison intime qui règne entre ce lieu et celui dans lequel le rectangle des parties proposées est donné de grandeur. Porisme relatif à ce lieu, et remarque sur ce genre de propositions	39-43	28
D'un même point soient menées deux droites faisant entr'elles un angle donné, et ayant entr'elles un rapport donné. Que l'extrémité d'une de ces droites soit à la circonférence d'un cercle donné, l'extrémité de l'autre de ces droites est aussi à la circonférence d'un cercle donné. Liaison qui règne entre ce lieu, et celui qui est relatif au rectangle des mêmes droites	44-46	30
D'un même point soient menées des droites, sur chacune d'elles soient pris deux points, tels, que le rectangle de leurs distances au premier point soit		

donné

pages. §§

donné de grandeur; que l'un de ces points soit à une droite donnée de position; l'autre de ces points est à la circonférence d'un cercle donné (qui passe par le premier point); et réciproquement, si l'un de ces points est à la circonférence d'un cercle donné qui passe par le premier point, l'autre de ces points est à une droite donnée 46-48 31

Soit une droite donnée de grandeur et parallèle à une droite donnée de position; qu'une des extrémités de la première droite soit à la circonférence d'un cercle donné; l'autre extrémité de cette droite est aussi à la circonférence d'un cercle donné 48-49 32

Soient deux droites données de position; une ligne droite est le lieu des points de chacun desquels menant aux droites données de position des droites sous des angles donnés, leur rapport est donné 49-52 33

Soient deux droites données de position, et soient deux droites correspondantes données de grandeur. Une ligne droite est le lieu des points de chacun desquels menant aux droites données de position des droites sous des angles donnés, la somme de leurs rectangles par les droites données de grandeur, est donnée de grandeur. Liaison de ce lieu avec la doctrine du centre des moyennes distances 52-55 34

Soient des droites qui se coupent en un même point données de position, et soient des droites correspondantes données de grandeur. Une ligne droite est le lieu des points de chacun desquels menant des droites sous des angles donnés aux droites données de position, la somme de leurs rectangles par les droites données de grandeur est donnée de grandeur. Liaison de ce lieu avec la doctrine du centre des moyennes distances. Cas dans lequel la question est indéterminée 55-59 35

Soient des droites en nombre quelconque données de position sur un plan, et soient des droites correspondantes données de grandeur. Une ligne droite est le lieu des points de chacun desquels menant des droites sous des angles donnés aux droites données de position, la somme de leurs rectangles par les droites données de grandeur est donnée de grandeur. Liaison de ce lieu avec le § précédent; cas indéterminé, et sa liaison avec le centre des moyennes distances 59-65 36

Une ligne droite est le lieu des points de chacun desquels menant des droites à deux points donnés la différence de leurs carrés est constante . . . 65-67 37

La circonférence d'un cercle est le lieu des points de chacun desquels menant des droites à deux points donnés la somme de leurs carrés est donnée de grandeur. 67-69 38

La circonférence d'un cercle est le lieu des points de chacun desquels menant des droites à deux points donnés, la somme des espaces qui ont aux carrés de ces droites des rapports donnés est donnée de grandeur. Limite de cet espace. 70-71 39

La circonférence d'un cercle est le lieu des points de chacun desquels menant des droites à deux points donnés la différence des espaces qui ont aux carrés de ces droites des rapports donnés (inégaux entr'eux), est donnée de grandeur. 71-76 40

La circonférence d'un cercle est le lieu des points de chacun desquels menant

pages. §§

des droites à des points donnés de position, la somme des espaces qui ont aux carrés de ces droites des rapports donnés est donnée de grandeur. Limite de ce dernier espace; liaison avec la doctrine du centre des moyennes distances 76-79 41

La circonférence d'un cercle est le lieu des points de chacun desquels menant des droites à des points donnés, la somme des espaces qui ont des rapports donnés aux carrés des droites menées à quelques-uns de ces points, diffère d'un espace donné de grandeur, de la somme des espaces qui ont des rapports donnés aux carrés des droites menées aux points restans. Cas dans lequel ce lieu est une droite 79-81 42

La circonférence d'un cercle est le lieu des sommets des triangles dont la base est donnée de grandeur, et dans lesquels le rectangle des côtés est égal au rectangle de la hauteur par une droite donnée de grandeur 81-83 43

La circonférence d'un cercle est le lieu des points de chacun desquels menant deux droites, l'une à un point donné, et l'autre perpendiculaire à une droite donnée; le carré de la première est égal au rectangle de la seconde par une droite donnée de grandeur. Applications diverses 83-88 44

La circonférence d'un cercle est le lieu des points de chacun desquels menant des droites à deux points donnés, leur rapport est égal à un rapport donné (différent du rapport d'égalité). Liaison de ce lieu avec celui du § précédent. 88-90 45

La circonférence d'un cercle est le lieu des points de chacun desquels menant des droites à deux points donnés; le carré d'une de ces droites a un rapport donné (différent du rapport d'égalité), à la somme ou à la différence d'un espace donné de grandeur et du carré de la droite menée à l'autre point. Applications diverses 90-93 46

SECONDE PARTIE.

Additions diverses aux Lieux plans d'Apollonius 93-111 47-56

De la section harmonique.

Si trois des points d'une section harmonique sont à des droites données de position qui se coupent en un même point; le quatrième de ces points est aussi à une droite donnée de position 93-95 47

Une ligne droite est le point de section des diagonales d'un trapèze dont un des côtés parallèles entr'eux est donné de grandeur et de position, et dont les côtés adjacens au premier de ces côtés sont donnés de position. La droite qui joint le point de rencontre des côtés opposés d'un quadrilatère, et de ses diagonales, est coupée harmoniquement dans ces points, et dans les points dans lesquels elle rencontre les deux autres côtés 95-97 48

Soit une droite menée par un point donné sur le plan d'un cercle, coupée harmoniquement dans les points où elle rencontre la circonférence et dans deux autres points. Si l'un de ces derniers points est donné de position, le lieu de l'autre de ces points est une ligne droite 97-98 49

Une ligne droite est le lieu des points de rencontre des tangentes à un cercle

pages. §§

donné; telles que la droite qui joint les points de contact passe par un point donné 98-99 50

Soient trois points donnés de position. Par l'un de ces points soit menée une droite quelconque sur laquelle soient abaissées depuis les deux autres des perpendiculaires; et sur la même droite soit déterminé un point tel, que le rapport de ses distances aux pieds des perpendiculaires soit donné; le lieu de ce dernier point est une ligne droite 99-100 51

Soient trois droites qui se coupent données de position. D'un même point pris sur le plan de ces droites soit menée une droite qui les coupe, de manière que les rapports des parties de cette droite comprises entre ce point et les points de section soient égaux à des rapports donnés. Le lieu de ce point est une ligne droite 100-104 52

Soit un quadrilatère dont un des côtés pris pour base est donné de grandeur et de position; que le côté opposé à la base la rencontre en un point donné (ou lui soit parallèle); que les points de rencontre des côtés adjacens à la base et du côté qui lui est opposé soient à des droites données de position; une ligne droite est le lieu des points de rencontre des côtés adjacens à la base. Application aux points de rencontre des côtés des figures rectilignes d'un nombre quelconque de côtés 104-108 53

Une ligne droite est le lieu des points de chacun desquels on voit sous un même angle deux droites données de grandeur et de position sur une même ligne droite 108-109 54

La circonférence d'un cercle est le lieu des points de chacun desquels abaissant des perpendiculaires sur des droites données de position qui se coupent en un même point, de manière à couper en parties égales la quantité angulaire autour d'un point, la somme des carrés de ces perpendiculaires est constante. 109 55

La circonférencé d'un cercle est le lieu des points de chacun desquels abaissant des perpendiculaires sur les côtés d'un polygone régulier, la somme de leurs carrés est constante 110-111 56

CHAPITRE II.

Application de l'analyse algébrique à la recherche des lieux à la ligne droite et à la circonférence du cercle. 111-146 57-84

Principes de la doctrine des coordonnées et définitions 112-113 57

Détermination de la distance de deux points et de la position de la droite qui les joint dans les coordonnées de ces points 113- 58

Equation de la ligne droite tirée de la grandeur de la perpendiculaire abaissée sur elle depuis l'origine, et des angles qu'elle fait avec les axes . . . 114- 59

Rapprochemens des deux §§ précédens 114-115 60

Expression de la perpendiculaire abaissée sur une droite donnée depuis un point donné. 115 61

Détermination du point de section de deux droites dont on connoît les équations. 116 62

Détermination d'un triangle dont on connoît les côtés par leurs équations . 117 63

Digitized by Google

pages. §§

Détermination de la position d'une droite relativement à un cercle, en connoissant leurs équations 117-118 64

Détermination d'un cercle dont la circonférence passe par trois points donnés par leurs coordonnées 118-119 65

Conversion des coordonnées relatives à différens axes 120-121 66

Recherche du lieu des points dont la différence des carrés des distances à deux points donnés est constante 121-122 67

Recherche du lieu des points dont le rapport des distances à deux droites données de position est constant 122-123 68

Recherche du lieu des points de chacun desquels abaissant des perpendiculaires sur des droites données de position la somme de leurs rectangles par des droites données de grandeur est constante 123-126 69-71

Lieux à la ligne droite, relatifs à la section harmonique 126-128 72-73

Détermination du lieu des points, de chacun desquels menant des droites à deux points donnés, elles forment à ces points des angles donnés 128-129 74

Recherche du lieu des points dont le rapport des distances à deux points donnés est égal à un rapport donné 129-130 75

Recherche du lieu des points de chacun desquels menant deux droites, l'une à un point donné, et l'autre perpendiculaire à une droite donnée, le carré de la première est égal au rectangle de la seconde par une droite donnée. 130-131 76

Recherche du lieu des points de chacun desquels menant des droites à deux points donnés la somme ou la différence des espaces qui ont des rapports donnés aux carrés de ces droites est égale à un espace donné de grandeur. 131-132 77

Recherche du lieu des points de chacun desquels menant des droites à des points donnés, la somme (ou quelque différence) des espaces qui ont aux carrés de ces droites des rapports donnés, est donnée 132-133 78

Recherche du lieu des points de chacun desquels menant à une droite donnée de position une ordonnée sous un angle donné; l'espace qui a un rapport donné au carré de l'abscisse comptée sur la droite donnée depuis un point donné, diffère du carré de l'ordonnée, d'un espace qui a un rapport donné au rectangle de l'abscisse par l'ordonnée 133-135 79

Recherche du lieu des points de chacun desquels abaissant des perpendiculaires sur les côtés d'un polygone régulier, la somme de leurs carrés est donnée de grandeur. Recherche de la somme des sinus et cosinus des arcs qui croissent comme les nombres naturels 135-137 80

La même recherche pour la somme des cubes. Exception que présente le triangle équilatéral. Eclaircissement de cette exception 138-141 81

Soient des droites données de position. Sur ces droites soient abaissées d'un même point des perpendiculaires; et que la somme des carrés de ces perpendiculaires, ou la somme des espaces qui ont à ces carrés des rapports donnés, soit donnée. Détermination des cas dans lesquels le lieu de ces points est la circonférence d'un cercle 141-144 82-83

Soit un quadrilatère donné de grandeur et d'espèce; d'un même point soient abaissées

pages. §§

abaissées des perpendiculaires sur ses côtés, et que le rapport des rectangles des perpendiculaires abaissées sur les côtés opposés soit donné. Détermination des cas dans lesquels le lieu de ces points est une circonférence de cercle 144-146 84

CHAPITRE III.

Lieux au Plan et à la surface sphérique traités géométriquement 146-167 85-99

Définition des lieux à une surface; éclaircissemens 146-147 85

Lieux à la ligne droite qui découlent des lieux au plan 148 86

Lieux au plan et à la surface sphérique, qui découlent immédiatement des lieux correspondans à la ligne droite et à la circonférence du cercle . 148-150 87

Recherche du lieu des points de chacun desquels abaissant des perpendiculaires sur des droites données de position dans l'espace, et qui se coupent en un même point, la somme des rectangles faits par les segmens retranchés depuis le point de section des droites données, et par des droites correspondantes données de grandeur, soit égale à un espace donné 150-152 88

Recherche du lieu des points de chacun desquels abaissant des perpendiculaires sur les faces d'un polyhèdre, la somme de leurs rectangles par des droites données de grandeur soit donnée de grandeur. Exposition d'un cas indéterminé auquel cette question donne lieu 153-155 90

Recherche du lieu des points dans l'espace de chacun desquels menant des droites à des points donnés de position, la somme des espaces qui ont aux carrés de ces droites des rapports donnés, soit égale à un espace de grandeur 155-157 91

Recherche du lieu des points de chacun desquels abaissant des perpendiculaires sur les faces d'un angle solide régulier, la somme des carrés de ces perpendiculaires soit égale à un espace donné de grandeur . . . 157-158 92-93

Recherche correspondante sur une pyramide droite à base régulière; sur un prisme droit à base régulière; sur un fuseau pyramidal composé de pyramides droites à bases régulières, sur les polyhèdres réguliers, et sur quelques autres polyhèdres 158-167 93-99

CHAPITRE IV.

Application de l'analyse algébrique à la recherche des Lieux au plan et à la surface sphérique 167-195 100-125

Principes de la doctrine des coordonnées et des plans coordonnés. Définitions diverses. Exposition de la somme des carrés des coordonnées d'un point, et de celle des carrés des sinus et des cosinus des angles qu'une droite fait avec les plans coordonnés 167-169 100

Sur la position d'une droite dans l'espace, déterminée par les coordonnées

	pages.	§§
de deux de ses points, et sur celle des projections de cette droite sur ces plans	169-171	101
Sur la position de deux droites entr'elles, déterminée par leurs positions relativement aux plans coordonnés	171-172	102
Sur l'équation du plan, déterminée par la perpendiculaire abaissée de l'origine sur ce plan, et par les angles que cette perpendiculaire fait avec les plans coordonnés; éclaircissemens divers sur cette équation, et applications	172-174	103-105
Détermination de l'inclinaison mutuelle de deux plans dont on connoît les équations	174-175	106
Equation de la droite qui est la commune section de deux plans dont on connoît les équations	175-176	107
Détermination de la perpendiculaire abaissée d'un point sur un plan .	176	108
Sur la conversion des coordonnées	176-177	109
Détermination de l'équation d'un plan dans les coordonnées de trois de ses points; applications diverses, et en particulier, expression d'une figure rectiligne dans ses projections sur les plans coordonnés	177-181	110-112
Equation de la surface sphérique	181-182	113
Equation de l'intersection de deux surfaces sphériques	182-183	114
Equation du plan qui touche une sphère donnée, et équation du plan qui touche trois sphères données	183-184	115
Détermination de la surface sphérique qui passe par quatre points donnés, ou qui doit toucher des plans et des sphères données	184-185	116
Recherche du lieu des points également éloignés de deux points donnés; et du lieu des points tels que la différence des carrés de leurs distances à deux points donnés est constante	185-186	117
Recherche du lieu des points de chacun desquels abaissant des perpendiculaires sur deux plans donnés leur rapport est donné	186 187	118
Recherche du lieu des points de chacun desquels abaissant des perpendiculaires sur des plans donnés de position, la somme des rectangles de ces perpendiculaires par des droites données de grandeur est donnée de grandeur.	187-188	119
Recherche du lieu des points dont le rapport des distances à deux points donnés est donné	188	120
Recherche du lieu des points de chacun desquels menant deux droites, l'une à un point donné, et l'autre perpendiculaire à un plan donné, le carré de la première est égal au rectangle de la seconde par une droite donnée .	188-189	121
Recherche du lieu des points de chacun desquels menant des droites à des points donnés, la somme des espaces qui ont aux carrés de ces droites des rapports donnés, est donnée	189-190	122
Soient des plans donnés de position dans l'espace; d'un même point soient abaissées sur ces plans des perpendiculaires; que la somme des carrés de ces perpendiculaires soit donnée de grandeur. Détermination des cas dans lesquels le lieu de ce point est une surface sphérique	190-193	123-124

Digitized by Google

pages. §§

D'un même point soient abaissées sur les faces d'un tétraèdre des perpendiculaires; que le rectangle de deux de ces perpendiculaires ait un rapport donné au rectangle des deux autres. Détermination des cas dans lesquels le lieu de ce point est une surface sphérique 193-195 125

CHAPITRE V.

Application des Lieux géométriques à la solution des problèmes élémentaires déterminés 195-298 126-150

Eclaircissemens sur l'utilité des lieux géométriques, tirés de quelques exemples très-simples 195-200 126

Problème. Partager deux droites données l'une et l'autre en deux parties, telles, que le rapport d'une partie de l'une à une partie de l'autre soit donné; et que le rapport des deux autres parties soit aussi donné. Application à un nombre de droites quelconques. Inscription à une figure rectiligne d'une autre figure rectiligne de même nom, et dont les côtés sont parallèles à des droites données de position. Distinction essentielle entre les figures rectilignes suivant que le nombre de leurs côtés est pair ou qu'il est impair 200-203 127

Digression sur les Porismes à laquelle donne lieu les problèmes compris dans le § précédent. Développement du sentiment du D.r Playfair, et éclaircissement par quelques exemples 203 207 128

Problème. Décrire un triangle dont on connoît la base, la hauteur et l'angle au sommet 207-209 129

Problème. Par un point donné sur le plan d'un angle donné, mener une droite de manière que le rectangle de ses parties comprises entre ce point et les jambes de l'angle donné soit donné de grandeur 209-211 130

Problème. On demande un triangle dont on connoît la base, la hauteur et la différence des angles à la base 211-212 131

Problème. On demande un triangle dont on connoît la base, l'angle au sommet, et la somme des côtés.

Théorèmes divers sur les triangles dont un angle est connu.

Applications à plusieurs problèmes sur les triangles 212-224 132

Problème. On demande un triangle dont on connoît la base, l'angle au sommet, et la somme (ou la différence) des rectangles de ses côtés par des droites données 225-226 133

Problème. On demande un triangle dont la base est donnée de grandeur et de position, dont le sommet est sur une droite donnée de position, et dont la somme (ou la différence) des côtés est donnée.

Application relative aux figures du plus petit contour, inscrites à des figures de même nom. Différence remarquable à cet égard entre les figures dont le nombre des côtés est pair ou impair 226-234 134

Problème. Soient trois points donnés de position sur une ligne droite; on demande sur cette droite un quatrième point, tel que le rectangle de ses

pages. §§

distances à deux des points donnés soit au carré de sa distance au troisième des points donnés, dans un rapport donné.

Application. Soient quatre points donnés de position sur une même droite, on demande sur la même droite un cinquième point, tel, que le rectangle de ses distances à deux des points donnés ait un rapport donné au rectangle de ses distances aux deux autres points donnés 234-239 135

Problème. On demande un triangle dont on connoît la base, l'angle au sommet, et la droite qui divise cet angle en deux parties égales . . . 239-242 136

Problème. Soient deux points et une droite donnés de position. Trouver sur cette droite deux points de chacun desquels menant des droites aux deux points donnés elles comprennent à ces derniers points des angles donnés. 242-246 137

Problème. Soit un triangle donné de grandeur et d'espèce, on demande le point (sur le plan du triangle) duquel menant des droites à ses sommets, elles comprennent entr'elles des angles donnés 246-252 138

Problème. A un triangle donné circonscrire un triangle donné de grandeur et d'espèce; et à un triangle donné inscrire un triangle donné de grandeur et d'espèce 252-255 139

Problème. Déterminer un quadrilatère inscriptible au cercle, en connoissant ses quatre côtés 255-258 140

Problème. On demande un quadrilatère dont on connoît les quatre côtés et la surface 258-261 141

Problème. On demande un quadrilatère dont on connoît les angles et les diagonales 262-265 142

Problème. On demande un quadrilatère dont on connoît les angles, la surface et le contour. Limite et application 265-268 143

Problème. Soit un quadrilatère donné de grandeur et d'espèce. Mener une droite qui coupe les côtés de ce quadrilatère, de manière que les parties de cette droite comprises entre ces côtés soient entr'elles dans des rapports donnés. Réciproquement, soient quatre points donnés de position sur une ligne droite; mener par chacun de ces points une droite, de manière que le quadrilatère formé par ces droites soit donné d'espèce 268-273 144

Problème. A un quadrilatère donné circonscrire un quadrilatère donné d'espèce; et réciproquement, à un quadrilatère donné inscrire un quadrilatère donné d'espèce 273-276 145

Problème. A un cercle donné inscrire un triangle dont les côtés soient respectivement parallèles à des droites données de position ou passant par des points donnés de position 277-282 146

Problème. A un cercle donné inscrire un quadrilatère dont les côtés soient respectivement parallèles à des droites données de position, ou passent par des points donnés de position 282-286 147

Problème. A un cercle donné inscrire un polygone d'un nombre donné de côtés, et dont les côtés soient respectivement parallèles à des droites données de position, ou passent par des points donnés. Différence quant à

la

pages. §§

la première de ces conditions entre les polygones dont le nombre des côtés est pair ou impair 286-289 148

Problème. A un cercle donné inscrire un polygone d'un nombre pair de côtés, dont les angles sont donnés, en connoissant ou son contour ou sa surface. 289-293 149

Problème. Soient des points en nombre quelconque donnés de position sur un plan ; soient des coefficiens correspondans donnés de grandeur ; et soit une droite donnée de position sur ce plan. Trouver sur cette droite un point duquel menant des droites aux points donnés, la somme des espaces qui ont aux carrés de ces droites les rapports dont les exposans sont égaux aux coefficiens donnés soit égale à un espace donné. Limite de cet espace.

Application. Détermination du point duquel abaissant des perpendiculaires sur les côtés d'un triangle la somme de leurs carrés est la plus petite.

Application ultérieure Détermination du point duquel abaissant des perpendiculaires sur les faces d'un tétraèdre, la somme de leurs carrés est la plus petite 293- 150

FIN DE LA TABLE.

Digitized by Google

LIVRES NOUVEAUX qui se trouvent chez le même Libraire.

WALLSTEIN, tragédie en 5 actes et en vers, précédée de quelques réflexions sor le théâtre allemand, et suivie de notes historiques sur la guerre de trente ans, par M. Benj. Constant de Rebecque, 1 vol. in-8, 3 fr.

Lettres et Pensées du Prince de Ligne, publiées par Mad. la Baronne de Staël de Holstein, et précédées d'une préface de l'Editeur, 3.e édit., 1 vol. in-8, 4 fr. 50 c.

Rapport à S. Ex. le Landamman et à la Diète des dix-neuf Cantons de la Suisse, sur les établissemens de M. Fellenberg, à Hofwyl, par MM. Heer, Landamman de Glaris; Crud de Genthod, du canton de Vaud; Meyer, curé à Wangen, canton de Lucerne; Tobler, de l'An, du canton de Zurich; Hunkler, Juge au Tribunal d'Appel du canton de Lucerne, 1 vol. in-8, fig. 1808, 2 fr.

Tableau historique de l'Institut pour les pauvres de Hambourg, rédigé d'après les rapports donnés par M. le Baron de Vogth, traduit de l'allemand, in-8, 1 fr. 50 c.

Cours d'Agriculture anglaise, avec les développemens utiles aux agriculteors du continent, par Ch. Pictet, de Genève, 10 vol. in-8, 50 fr.

Voes relatives à l'Agriculture de la Suisse et aux moyens de la perfectionner, par Emmanuel Fellenberg, traduit de l'allemand, et enrichi de notes par M. Ch. Pictet, in-8, 1808, 1 fr. 80 c.

Itinéraire de Genève, des Glaciers de Chamouni, du Valais et do canton de Vaud, par Bourrit, historiographe des Alpes, in-12. 2 fr. 50 c.

Éléméns de la Philosophie de l'esprit humain, par M. Dugald Stewart, professeur de philosophie morale à l'Université d'Edimbourg, de la Société Royale d'Edimbourg, de diverses Sociétés savantes, traduit de l'anglois, par Pierre Prevost, Professeur de philosophie à Genève, des Sociétés Royales de Londres et d'Edimbourg, 2 vol. in-8, 1808, 9 fr.

Histoire de Gustave III, Roi de Suède, trad. de l'allemand de Posselt, par J. L. Manget, 1 v. in-8 de 450 pages, 4 fr. 50 c.

Grammaire et Art d'écrire, par Condillac, nouv. édit., rev. et cor., 2 vol. in-12, 1808, 4 fr. 50 c.

Argus, ou Correspondance de famille, trad. de l'anglois, 4 vol. in-12, 1804, 8 fr.

Bible (nouv. trad. de la Sainte), comprenant les livres de l'anc. et du nouv. Testament, faite, quant aux premiers, sur le texte hébreux, par les Pasteurs et Profess. de l'Eglise de Genève, 2 vol. in-fol., 36 fr.

La même, 1 vol in-fol., p. p., 24 fr

La même, 3 vol. in-8, 12 fr.

Câliste, ou Lettres écrites de Lausanne, par Mad. de Charriere, 2 vol. in-12, 3 fr.

Cours de morale religieuse, par M. Necker, 3 vol. in-8, 10 fr. 50 c.

De la Vie et des Ecrits de P. H. Mallet, auteur de l'Histoire de Danemarc, de celle des Suisses, et de plusieurs autres ouvrages, par M. Simonde, in-8, 1 fr.

Dernières vues de politique et de finance, offertes à la Nation françoise, par M. Necker, in-8, 1802, 3 fr. 60 c.

Description des Alpes Grecques et Cottiennes, ou Tableau historique et statistique de la Savoie, sous les rapports de son ancienneté, de son étendue, de sa population, de ses antiquités et de ses productions minéralogiques; suivie d'un précis des événemens militaires et politiques qui ont eu lieu dans cette province depuis sa réunion à la France en 1702, jusqu'à la paix d'Amiens, en 1802, par J. F. Alb. Beaumont, memb. honor. des Sociétés et arts et des sciences de Londres, Genève, etc. 2 vol. in-4. avec atlas grand in-fol. de 24 planches, 60 fr.

Description d'une suite d'expériences qui montrent comment la compression peut modifier l'action de la chaleur, par sir James Hall, bar. trad. de l'angl. par M. A. Pictet, corresp. de l'Inst. nat., de la Soc. Roy. de Londres, avec les figures originales, représentant tous les appareils et quelques-uns des principaux résultats, 1 vol. 3 fr. 60 c.

Des prairies artificielles d'été et d'hiver, de la nourriture des brebis, par C. L. M. Lullin, membre de la Société des arts de Genève, et membre du Comité d'Agricolture de cette ville, 1 vol. in-8 de 450 pages, 5 fr.

Education pratique, traduction libre de l'anglois de Maria Edgeworth, par Charles Pictet de Genève, nouv. édit., augmentée, 2 vol. in-8, 1801, 6 fr.

Essais de Philosophie, ou étude de l'Esprit humain. I.er Essai: Analyse des facultés de l'Esprit humain. II.e Essai: Logique, par Pierre Prevost, Correspondant de l'Inst. nat., Professeur de philosophie à l'Académie de Genève; de l'Académie de Berlin; de la Soc. royale d'Edimbourg, et de quelques autres Sociétés savantes: suivi de quelques opuscules de G. L. Le Sage, correspondant de l'Académie des Sciences et de l'Inst. national, etc., 2 vol. in-8., Genève, an 13 (1805), 7 fr. 50 c.

Essai sur l'Art d'observer et de faire des expériences, par M. Senebier, 3 v. in-8, 1802, 10 fr.

Félicie et Florestine, par l'auteur des Mémoires d'une famille émigrée, 3 v. in-12, an 12, 6 fr.

Germaine (nouvelle), par l'auteur des Orphelines de Flowen-Gardeo, in-12, Genève, an 12 (1804), 1 fr. 50 c.

Digitized by Google

Grammaire françoise de Lhomont, vol. in-12, 1806, 75 c.

Histoire des Gaulois, depuis leur origine jusqu'à leur mélange avec les Francs, et jusqu'aux commencemens de la monarchie françoise, par Jean Picot, de Genève, Professeur d'histoire et de statistique dans l'Académie de cette ville, 3 vol. in-8, Genève, an 12 (1804), 12 fr.

Histoire des Conferves d'eau douce, contenant leurs différens modes de reproduction, et la différence de leurs espèces, avec des observations nouvelles sur la multiplication des Tremelles et des Ulves, par le professeur Vaucher, in-4, 17 pl., 1803, 15 fr.

Instruction Chrétienne, par le Professeur Vernet, de Genève, 4.e édit., faite sur la dernière édition, revue et augmentée par l'Auteur, précédée d'une notice de sa vie et de ses écrits, par un de ses disciples, 5 vol. in-12, 9 fr.

La nouvelle Liturgie à l'usage des Eglises réformées de France, 1 vol. in-4, 2 fr. 50 c.

La même, sur fort papier, 4 fr.

La même, gr. in-4, fort papier, 5 fr.

Lothaire et Malher, 1 vol. in-12, 1807, 2 fr.

Manuscrits de M. Necker, publiés par sa fille, Mad. de Staël, vol. in-8, 1805, 5 fr.

Mémoire historique sur la vie et les écrits de Horace-Bénéd. Desaussure, par Senebier, in-8, 1801, 2 fr. 50 c.

Mémoires physiologiques et pratiques sur l'Anévrisme et la ligature des artères, par J. P. Mannoir, in-8, fig. 1 fr. 80 c.

Mémoires sur la respiration, par Lazare-Spallanzani; trad. par J. Senebier, membre de diverses Sociétés savantes, in-8, an 11, 3 fr. 60 c.

Mémoires sur l'influence de l'Air et de diverses substances gazeuses dans la germination de différentes graines, par MM. Huber et Senebier, in-8, 1801, 2 fr. 50 c.

Notice sur la vie et les écrits de G.-L. Le Sage de Genève, membre de diverses Académies, de la Soc. roy. de Londres, et ci-devant de celle de Montpellier; corresp. de l'Acad. royale des sciences de Paris, et depuis corresp. de l'Inst national de France, rédigée d'après ses notes par P. Prevost, suivie d'un opuscule de Le Sage sur les *Causes finales*, du *Lucrèce newtonien*, d'extraits de sa correspondance avec divers savans et personnes illustres, telles que le duc de Rochefoucault, Mad. la duchesse d'Enville, Mad. Necker, d'Alembert, Bailly, Clairaut, La Condamine, Stanhope, Euler, Lambert, Ch. Bonnet, Boscowich, et d'un extrait de la correspondance de Bachet de Méziriac avec Nathan d'Aubigné, trisaïeul de Le Sage, vol. in-8 de 600 pages, 1805, 6 fr.

Nouveaux Tableaux de Famille, ou Vie d'un pauvre Ministre de village allemand et de ses enfans, traduit de l'allemand d'Auguste Lafontaine, par Mad. de Montolieu, 2.e édit., revue et corrigée, 5 vol. in-12 (1804), 9 fr.

Nouveau Robinson (le), pour servir à l'instruction et à l'amusement de la jeunesse, trad. de l'allemand de Campe, nouv. édit., rev. et corr. 2 vol. in-12, fig., 1801, 3 fr.

Observations sur les bêtes à laine dans les environs de Genève, pendant 20 ans, par C. L. M. Lullin, Membre de la Société des Arts de Genève, et du Comité d'Agriculture de ladite ville, vol. in-8, 2.e édit., 1807, 2 fr. 50 c.

Physiologie végétale, contenant une description anatomique des organes des plantes, par Senebier, 5 vol. in-8, 1800, 21 fr.

Principes philosophiques, politiques et moraux, par le colonel Weiss, ancien bailli de Moudon, et membre de diverses Académies, 7.e édition, revue, corrigée et augmentée par l'Auteur, 2 vol. in-8, 1806, 7 fr. 50 c.

Rapport de l'air avec les êtres organisés, ou Traité de l'action du poumon, et de la peau des animaux sur l'air, comme aussi de celle des plantes sur ce fluide, tirés des Journaux d'observations de L. Spallanzani, avec quelques Mémoires de l'Editeur sur ces matières, par J. Senebier, de diverses Académies, et correspondant de l'Inst. nat., 3 v. in-8, 12 fr.

Recherches sur la nature et les lois de l'imagination, par M. de Bonstetten, in-8, Genève, 1807, 5 fr.

Recueil de contes, par Mad. Isabelle de Montolieu, auteur de Caroline de Lichtfield, traducteur des Tableaux de Famille, etc., 3 vol. in-12, fig., Genève, an 12 (1804), 6 fr.

Remèdes curatifs et préservatifs pour les maladies du bétail, vol. in-12, 2.e édit., 1803, 1 fr. 50 c.

Renouvellemens périodiques des continens terrestres, par L. Bertrand, professeur émérite de l'Académie de Genève, 2.e édition, corr. et aug., vol. in-8, an 11 (1803), 5 fr.

Richesse commerciale (de la), ou principes d'économie politique appliqués à la législation du commerce, par J. C. L. Simonde, membre du Conseil de Commerce, Arts et Agriculture du Léman, etc., 2 vol. in-8, an 12 (1804), 9 fr.

Traité des Assolemens, ou l'art d'établir les rotations de récoltes, par Ch. Pictet, in-8, 1801, 3 fr.

Traité des engrais, tiré des différens rapports faits au département d'Agriculture d'Angleterre, avec des notes, suivi de la traduction du *Mémoire de Kirwan sur les engrais*, et de *l'Exposition des principaux termes chimiques employés dans cet ouvrage*, par M. Maurice, Maire de la ville de Genève, Secrétaire de la Société des Arts de la même ville, Associé et Correspondant de diverses Sociétés, 1 vol. in-8 de 500 pages environ, 2.e édit., revue, corrigée et augmentée, 5 fr.

Voyage sur la scène des six derniers livres de l'Enéide, suivi de quelques observations sur l'état présent du Latium, par M. de Bonstetten, de l'Ac. roy. de Copenhague, 1805, 4 fr. 50 c.

Voyageur sentimental (le) en France sous Robespierre, par Vernes de Genève, auteur du Voyageur sentimental à Yverdun, etc., 2 vol. in-12, avec fig. 4 fr.

Planche 1re

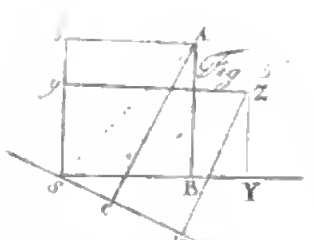


Fig 6e

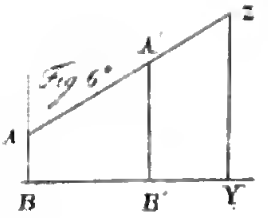


Fig 11e

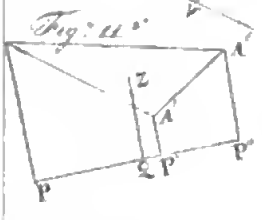


Fig 12e

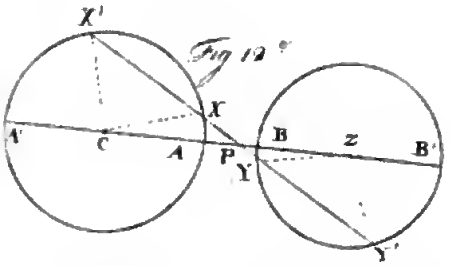


Fig 14e

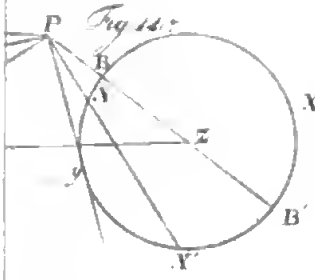


Fig 16e

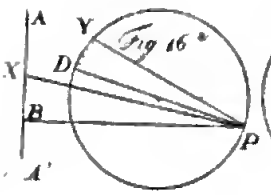


Fig 17e

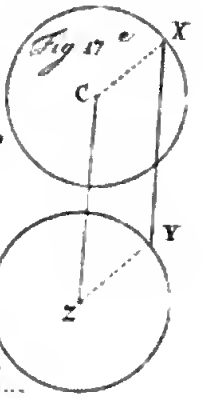


Fig 22e

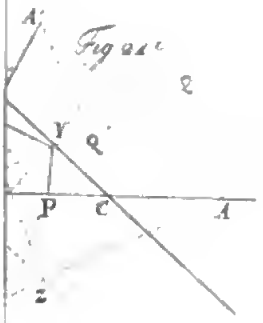


Fig 23e

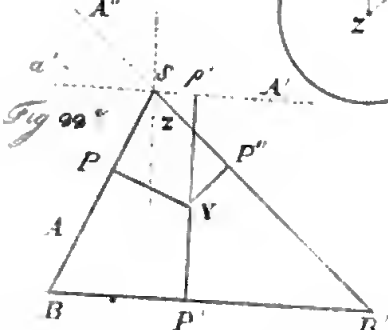


Fig 26e

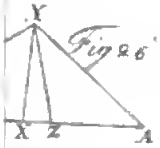


Fig 27e

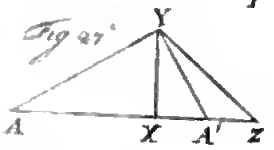


Fig 28e

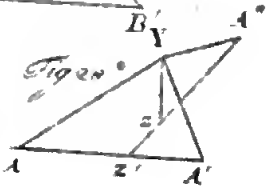
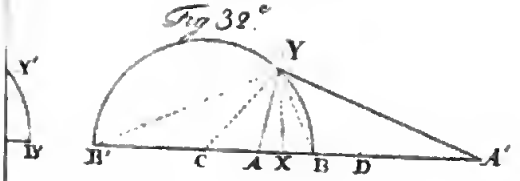


Fig 32e



Digitized by Google

Fig 36 2°

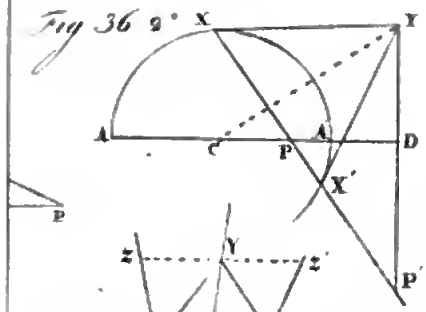


Fig 37

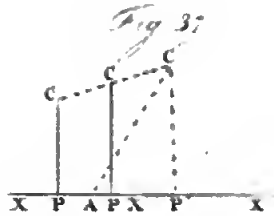


Fig 41 1°

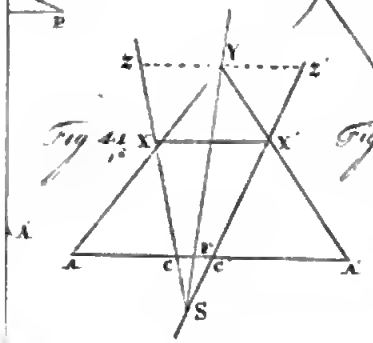
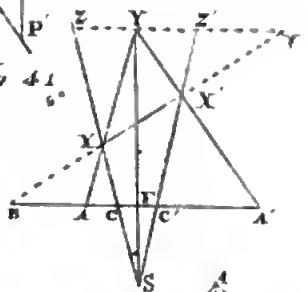


Fig 41 2°



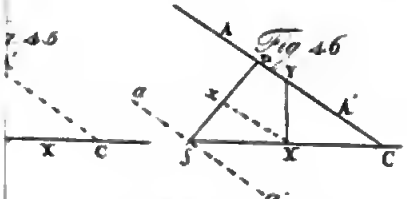


Fig 47

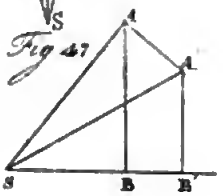


Fig 50

Fig 53

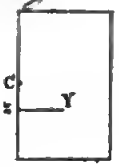


Fig 54

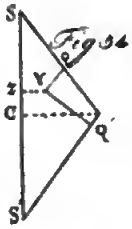


Fig 55

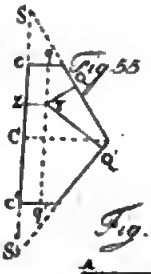
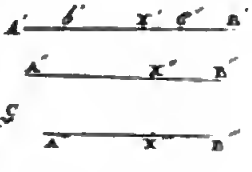


Fig. 60



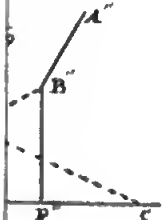


Fig 61

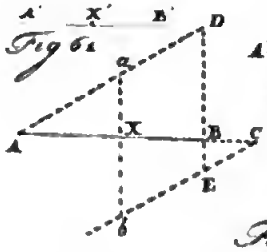


Fig 62

Fig 63

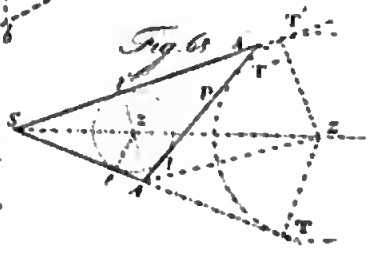


Planche 3.me

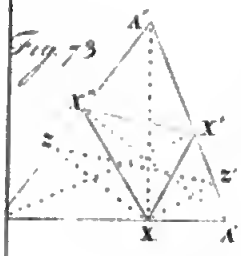


Fig. 73

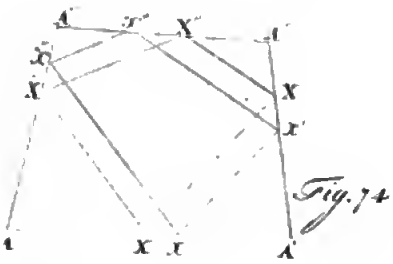


Fig. 74

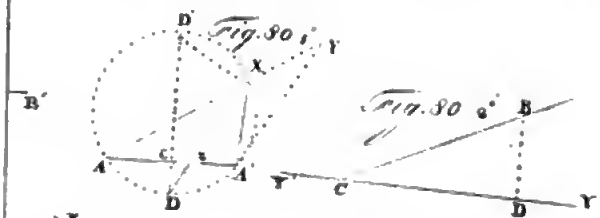
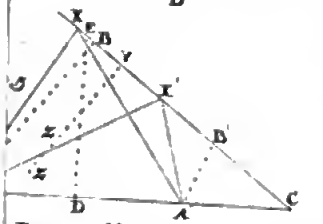


Fig. 80
Fig. 80



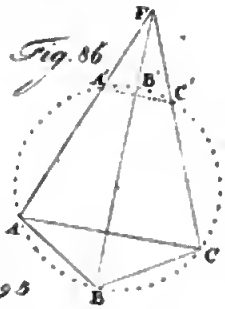


Fig. 86

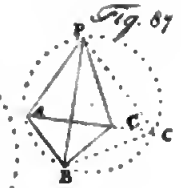


Fig. 87

Fig. 94

Fig. 95

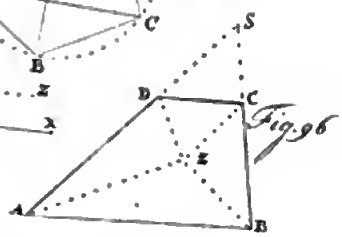
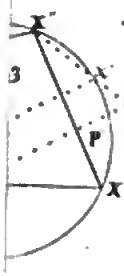


Fig. 96



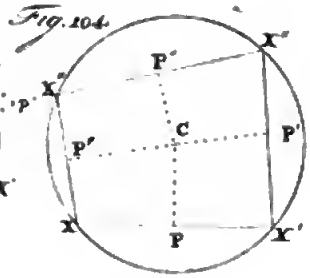


Fig. 104

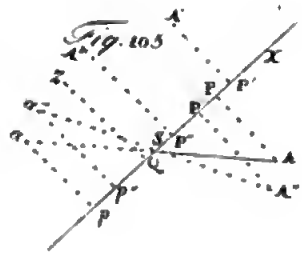


Fig. 105

Digitized by Google